Centro 2024 soluciones

Jorge Liu y Luis Modes

23 de octubre de 2024

Problema 1

Sea n un entero positivo de k dígitos. Un número m se dice *alero* de n si existen dígitos $a_1, \ldots, a_k$ diferentes entre sí y distintos de cero tales que m es obtenido al sumarle al dígito de la posición i de n el dígito a_i y ninguna suma sea mayor que 9. Por ejemplo, si $n = 2024$ y se escogen $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 3$, entonces $m = 4177$ es alero de n, pero no se puede obtener un alero de n si se escogen $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$ porque $4 + 6$ es mayor que 9. Encontrar el menor n múltiplo de 2024 que tenga un alero que también sea múltiplo de 2024.

Solución. La respuesta es $\boxed{10120}$. Primero, notemos que $10120 = 2024 \cdot 5$ cumple, ya que $48576 = 2024 \cdot 24$ es alero a n, pues podemos escoger $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (3, 8, 4, 5, 6)$. Ahora, demostremos que es el mínimo. Digamos que n cumple la propiedad, es decir, existe un m alero a n, y $2024 \mid n, m$. Entonces, tenemos que $\ell = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k} = m - n$ también es múltiplo de 2024. Es fácil ver que n debe tener al menos 5 dígitos, ya que, si tuviera 4 dígitos, entonces ℓ también tendría 4 dígitos, pero ningón múltiplo de 2024 de 4 dígitos tiene todos sus dígitos distintos entre sí y distintos a 0:

$$\{2024, 4048, 6072, 8096\}$$

Luego, n tiene al menos 5 dígitos, por lo que $n \geqslant 10120$, como queríamos. $\square$

Problema 2

Se tiene una fila con 2024 casillas. Ana y Beto juegan alternadamente, comenzando por Ana. En su turno, cada jugador selecciona una casilla vacía y coloca un dígito en dicho espacio. Cuando se llenan las 2024 casillas, se lee el número que se obtiene de izquierda a derecha, ignorando los posibles ceros iniciales. Beto gana si el número resultante es múltiplo de 99, y en caso contrario gana Ana. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describirla.

Solución. $\boxed{\text{Beto}}$ tiene la estrategia ganadora. Describámosla. Como hay 2024 casillas, si las enumeramos, podemos decir que hay 1012 casillas *pares* y 1012 casillas *impares*. La estrategia de Beto es la siguiente:

1. Si Ana coloca el dígito k en una casilla par, Beto coloca el dígito $9-k$ en otra casilla par.
2. Si Ana coloca el dígito k en una casilla impar, Beto coloca el dígito $9-k$ en otra casilla impar.

Notemos que Beto siempre puede hacer esto, ya que, si $0 \leqslant k \leqslant 9$, entonces $0 \leqslant 9-k \leqslant 9$. Además, hay una cantidad par de casillas pares e impares, por lo que, si Ana coloca en una casilla par/impar, siempre habrá alguna casilla par/impar en la que Beto pueda colocar su número. Solo falta demostrar que el número que Beto obtiene es un múltiplo de 99. En efecto, notemos que la suma de sus dígitos es $1012 \cdot 9$, que es múltiplo de 9, y la diferencia de la suma de sus dígitos en posición par y la suma de sus dígitos en posición impar es

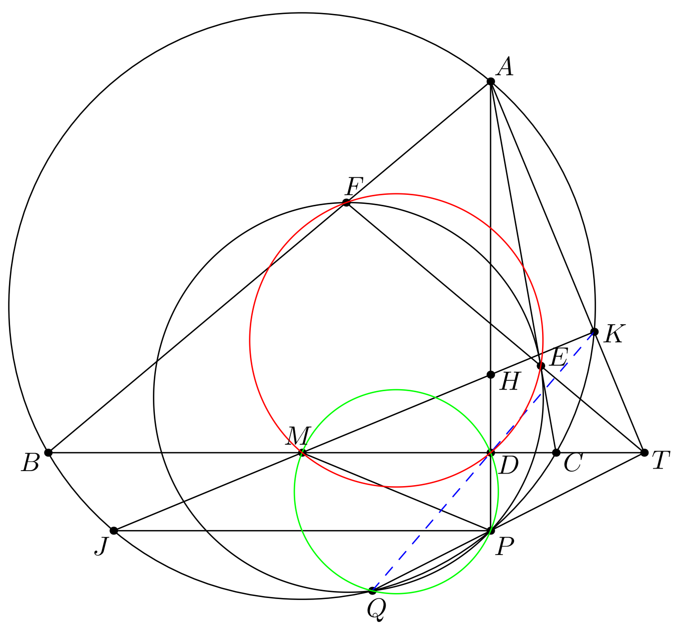
$$506 \cdot 9 - 506 \cdot 9 = 0,$$

por lo que también es múltiplo de 11. Por tanto, es múltiplo de 99, por lo que la estrategia de Beto funciona, como queríamos. □

Problema 3

Sea ABC un triángulo, H su ortocento y Γ su circuncírculo. Sea J el punto diametralmente opuesto a A en Γ. Los puntos D, E, F son los pues de las alturas desde A, B y C, respectivamente. La recta AD intersecta a Γ de nuevo en P. El circuncírculo de EFP corta de nuevo a Γ en Q. Sea K la segunda intersección de JH con Γ. Demostrar que K, D y Q son colineales.

Solución 1. Sea M el punto medio de BC. Es conocido (y no es difícil de probar por ángulos) que H, M y K son colineales, que $AEFK$ es cíclico, que $JP \parallel BC$ y que F, M, D y H son concíclicos (circunferencia de los nueve puntos). Ahora, por ejes radicales, como $AFEK$, $BCEF$ y $ABCK$ son cíclicos, las rectas AK, EF y BC concurren, digamos en T. Más aun, por ejes radicales, como $AFEK$, $EFQP$ y $AQPK$ son cíclicos, PQ también pasa por T.



Ahora, por potencia de punto,

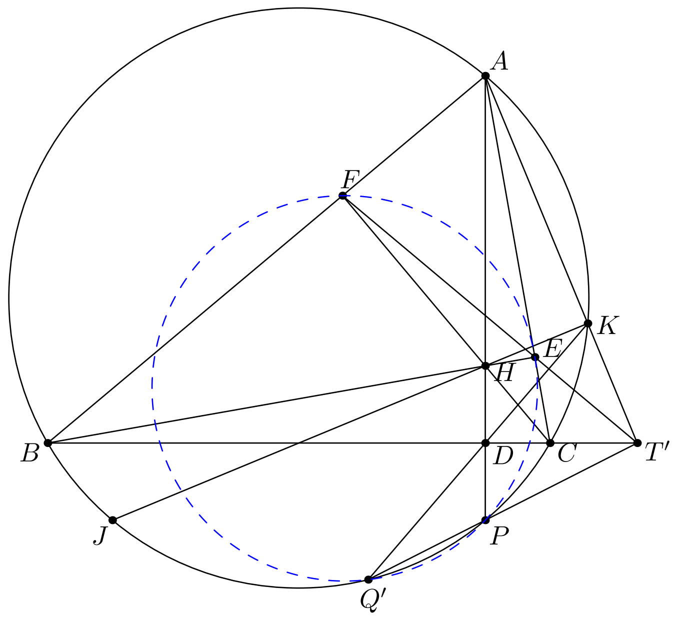
$$TD \cdot TM = TE \cdot TF = TP \cdot TQ,$$

por lo que $MQPD$ es cíclico. De aquí, notemos que

$$\angle PQK = \frac{\widehat{PC} + \widehat{CK}}{2} = \frac{\widehat{PC} + \widehat{BJ}}{2} = \angle BMJ = \angle PMD = \angle PQD.$$

Por lo tanto, Q, D y K son colineales, como queríamos. $\square$

Solución 2. Como en la primera solución, AK, EF y BC concurren en T. Sea Q' el segundo punto de intersección de KD con Γ. Notemos que $Q' \neq P$, excepto si $\triangle ABC$ es isósceles, en cuyo caso el problema es trivial. Digamos que $T' = Q'P \cap BC$



Es conocido (digamos, por Ceva-Menelao) que $(B, C; T, D) = (B, C; D, T) = -1$, por lo que

$$(B, C; T', D) \stackrel{P}{=} (B, C; Q', A) \stackrel{K}{=} (B, C; D, T) = -1 = (B, C; T, D).$$

Por lo tanto, $T = T'$. Ahora, por potencia de punto,

$$TP \cdot TQ' = TC \cdot TB = TE \cdot TF,$$

por lo que $EFQ'P$ es cíclico, es decir, $Q = Q'$. Como Q', D y K son colineales por defenición, terminamos. $\square$

Problema 4

Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circuncírculo. Sea D la segunda intersección de AI con Γ. la recta paralela a BC por I corta a AB y a AC en P y Q, respectivamente. Demostrar que los triángulos IEF y ABC son semejantes.

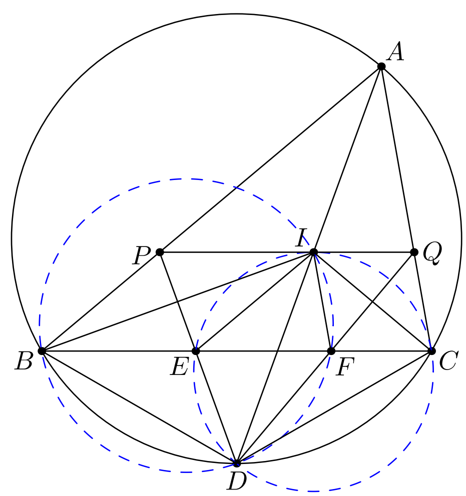
Solución 1. Primero, recordemos que $DB = DI = DC$ (esto se puede verificar fácilmente por ángulos). Ahora, notemos que $\angle CIQ = \angle ICB = \angle GCI$, por lo que $\triangle QIC$ es isósceles. Como $\triangle DCI$ también es isósceles, DQ es la mediatriz de IC, por lo que

$$\angle FDI = \frac{\angle CDA}{2} = \frac{\angle CBA}{2} = \angle FBI,$$

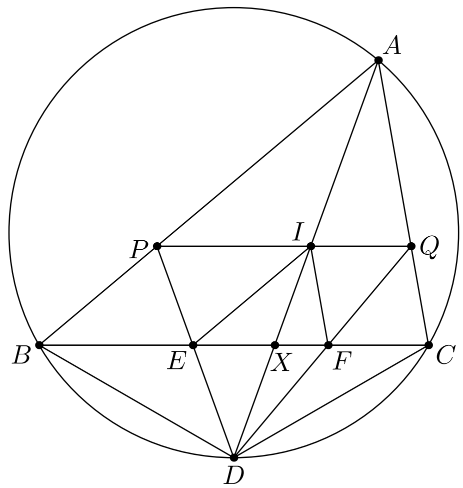
es decir, el cuadrilátero $BDFI$ es cíclico. De aquí, tenemos que

$$\angle DIF = \angle DBC = \angle DAC,$$

por lo que $IF \parallel AC$. De la misma manera, $IE \parallel AB$. Por lo tanto, $\triangle ABC$ y $\triangle IEF$ tienen sus lados correspondientes paralelos, por lo que son semejantes, como queríamos. $\square$



Solución 2. Sea $X = AI \cap BC$. Como en la solución anterior, sabemos que $DB = DC = DI$. También es conocido que $\triangle BDX \sim \triangle ADB$ (no es difícil de probar por ángulos).

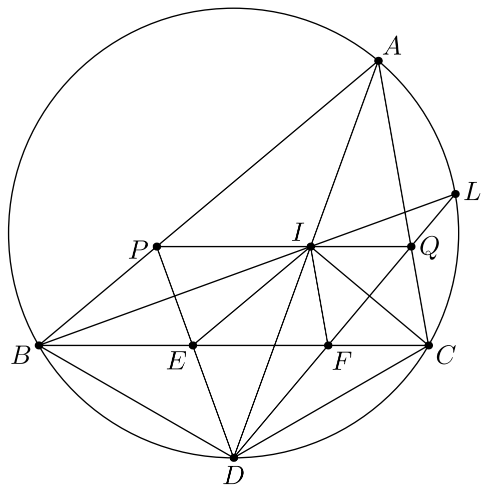


Por lo tanto,

$$\frac{DA}{DI} = \frac{DA}{DB} = \frac{DB}{DX} = \frac{DI}{DX} = \frac{DP}{DE}.$$

Por el teorema de Tales, esto implica que $IE \parallel AB$. Concluimos de la misma manera que en la solución anterior. $\square$

Solución 3. Sea L el punto medio del arco AC en Γ que no contiene a B.



Como en la primera solución, llegamos a que DQ es bisectriz de $\angle CDA$, por lo que DQ pasa por L. Ahora, aplicando el teorema de Pascal al hexángono cíclico degenerado $ADLLBC$, obtenemos que I, F y ∞_{AC} (el punto en el infinito en la dirección de AC) son colineales, es decir, $IF \parallel AC$. Concluimos de la misma manera que en la primera solución. $\square$

Problema 5

Sean x, y números reales positivos cumpliendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(2+\frac{5}{x+y}\right) & = 3 \\ \sqrt{y}\left(2-\frac{5}{x+y}\right) & = 2. \end{cases}$$

Encontrar el mayor valor de $x+y$.

Solución 1. La respuesta es $\boxed{x+y=5}$. Primero, $x+y=5$ es posible si $x=1$ y $y=4$. Ahora, demostremos que es el mayor. Asumamos por contradicción que existen x, y que cumplen el sistema de ecuaciones tales que $x+y>5$. Si este es el caso, por la segunda ecuación, tenemos que

$$\sqrt{y} = \sqrt{y}\left(2-\frac{5}{5}\right) < \sqrt{y}\left(2-\frac{5}{x+y}\right) = 2,$$

por lo que $y<4$. Ahora, demostraremos que $x \leqslant 1$. Asumamos por contradicción que $x>1$. En este caso, por la primera ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\left(2+\frac{5}{x+y}\right) &= 3 \\ \sqrt{x}\left(2+\frac{5}{x+4}\right) &< 3 \\ 2x\sqrt{x}+13\sqrt{x} &< 3x+12 \\ (2x+13)(\sqrt{x}-1) &< x-1 \\ 2x+13 &< \sqrt{x}+1 \\ 2x+12 &< \sqrt{x}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\sqrt{x} < x < 2x+12 < \sqrt{x},$$

pero esto es una contradicción. Luego, debemos tener que $x \leqslant 1$. Sin embargo, esto implica que

$$x+y < 1+4 = 5,$$

pero habíamos asumido que $x+y>5$. Esto es una contradiction. Por lo tanto, $x+y \leqslant 5$, como queríamos. □

Solución 2. La respuesta es $\boxed{x+y=5}$. Primero, $x+y=5$ es posible si $x=1$ y $y=4$. Ahora, demostremos que es el mayor. Demostremos que, no solo es el mayor valor posible de $x+y$, sino que es el único valor posible. Sea $n=x+y$. Notemos que

$$2-\frac{5}{x+y}=\frac{3}{\sqrt{y}}>0,$$

por lo que $n>\frac{5}{2}$. Despejando x y elevando al cuadrado en nuestra primera ecuación, obtenemos

$$x=\frac{9(x+y)^2}{(2(x+y)+5)^2}=\frac{9n^2}{(2n^2+5)^2}.$$

De manera similar, con la segunda ecuación, obtenemos que

$$y=\frac{4n^2}{(2n^2-5)^2}.$$

Ahora, sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$$n=\frac{9n^2}{(2n+5)^2}+\frac{4n^2}{(2n^2-5)^2}.$$

Expandiendo todo, obtenemos

$$(n-5)(16n^3+28n^2+40n-125)=0.$$

Ahora, como $n>\frac{5}{2}$, tenemos que

$$16n^3+28n^2+40n-125>2\cdot 125+7\cdot 25+20\cdot 5-125>0,$$

por lo que podemos cancelar el factor de $(16n^3+28n^2+40n-125)$, pues es distinto de 0. Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}(n-5)(16n^3+28n^2+40n-125)&=0\\ n-5&=0\\ n&=5\\ x+y&=5,\end{aligned}$$

como queríamos. □

Problema 6

Sean $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ enteros positivos. Un gato y un ratón están jugando *Wim*, que consiste en quitar piedras. Inician con n piedras y las quitan por turnos alternadamente, empezando por el gato. En cada turno, se vale quitar $1, 2, 3, \ldots$ o k piedras y pierde quien ya no pueda quitar más piedras en su turno. A un mapache le parece muy aburrido Wim, y crea *Wim 2*, que es Wim pero con la siguiente regla adicional: *No puedes quitar la misma cantidad de piedras que quitó tu oponente en el turno inmediatamente anterior.* Encontrar todos los valores de k tales que para todo n se cumple que el gato tiene la estrategia ganadora en Wim si y solo si tiene la estrategia ganadora en Wim 2.

Solución. La respuesta es $\boxed{\text{Todos los } k \text{ tales que } v_2(k+1) \text{ es par}}$. Dividiremos la demostración en tres lemas.

Lema 1. Para un k fijo, el gato tiene la estrategia ganadora en Wim si y solo si n no es un múltiplo de $k+1$.

Demostración. Primero, asumamos que n no es múltiplo de $k+1$, es decir, que es de la forma $m(k+1)+a$, con $m \geqslant 0$ y $1 \leqslant a \leqslant k$. La estrategia del gato consiste en siempre dejarle una cantidad múltiplo de $k+1$ de piedras al ratón. Como $1 \leqslant a \leqslant k$, puede empezar haciendo esto al remover a piedras. Como al ratón siempre le tocará remover alguna piedra, siempre dejará una cantidad de pierdas que no sea múltiplo de $k+1$, y el gato puede repetir el proceso. Como el gato siempre puede responder a las acciones del ratón, nunca se quedará sin movimientos, por lo que tiene la estrategia ganadora (es un juego finito y sin empates, por lo que si tienes alguna manera de no perder, ganas). Por exactamente la misma estrategia, si n es múltiplo de $k+1$, sin importar lo que haga el gato, le dejará una cantidad de piedras de la forma $m(k+1)+a$ al ratón, por lo que ahora es el ratón el que tiene la estrategia ganadora. Por lo tanto, el lema queda demostrado.

Lema 2. Si $v_2(k+1)$ es impar, el gato tiene una estrategia ganadora para $n = k+1$ en Wim 2.

Demostración. Digamos que $k+1 = 2^a b$, con a y b impares. La estrategia del gato será la siguiente:

1. Supongamos que el gato tiene $2^c b$ piedras en su turno, con c impar (como al inicio del juego). En este caso, el gato quita $2^{c-1}b$ piedras, dejando al ratón con $2^{c-1}b$ piedras.

2. Como el gato quitó $2^{c-1}b$ piedras y esto es Wim 2, el ratón no puede quitar $2^{c-1}b$ piedras, por lo que no puede quitar todas las piedras restantes. Si el ratón quita $d \neq 2^{c-2}b$ piedras, el gato simplemente quita $2^{c-1}b - d$ piedras y gana.

3. Si el ratón quita $2^{c-2}b$ piedras, el gato quedará con $2^{c-2}b$ piedras, donde $c-2$ es impar, y repite el Paso 1.

De nuevo, como el gato siempre tiene una respuesta, tiene la estrategia ganadora, como queríamos.

Lema 3. Si $v_2(k+1)$ es par, el gato tiene la estrategia ganadora en Wim 2 si y solo si n no es un múltiplo de $k+1$.

Demostración. Digamos que $k+1 = 2^a b$ con a par y b impar. Primero, asumamos que n no es múltiplo de $k+1$. La estrategia del gato será la siguiente:

1. En su primer movimiento, el gato quita lo necesario para dejar al ratón con una cantidad de de piedras múltiplo de $k+1$, digamos $2^a bm$ piedras.

2. Si en cualquier momento el ratón tiene $2^a b\ell$ piedras (como al inicio del juego) y quita $d \neq 2^{a-1}b$ piedras, el gato simplemente quita $2^a b - d$ piedras y deja al ratón con $2^a b(\ell-1)$ piedras.

3. Si el ratón quita $2^{a-1}b$ piedras, el gato quedará con $2^a b(\ell-1)+2^{a-1}b$ piedras, y entonces procede a quitar $2^{a-2}b$ piedras, dejando al ratón con $2^a b(\ell-1)+2^{a-2}b$ piedras.

4. Asumamos que en algún momento el ratón tiene $2^a bp + 2^c bf$ piedras, con p cualquier entero, $c < a$ par y f impar (como al final del paso anterior). Si el gato justamente acababa de quitar $2^c bf$ piedras (como al final del paso anterior), el ratón no puede volver a quitar $2^c bf$ piedras. Si quita e piedras, con $e \neq 2^{c-1}bf$, $(2^{a-1}+2^{c-1}f)b$, el gato puede quitar $2^c bf - e$ o $2^a b + 2^c bf - e$ piedras (dependiendo de si $e < 2^c bf$ o $e > 2^c bf$) y dejarlo en $2^a bp$ o $2^a b(p-1)$ piedras, regresando al ratón al Paso 2.

5. Si el ratón quita $2^{c-1}bf$ o $(2^{a-1}+2^{c-1}f)\cdot b$ piedras, la estrategia del gato será quitar $2^{c-2}bf$ o $(2^{a-2}+2^{c-2}f)\cdot b$ piedras, respectivamente. Esto dejará al ratón con $2^a b(p-1)+2^{c-2}bf$ o $2^a b(p-1)+(2^{a-c}+f)2^{c-2}b$ piedras, respectivamente. Esto regresa al ratón al Paso 4.

Estudiando esta estrategia, el gato siempre tiene una respuesta para el ratón, por lo que tiene la estrategia ganadora si n no es múltiplo de $k+1$. Por otro lado, si n es múltiplo de $k+1$, el gato empezará en el Paso 2 del ratón en la estrategia que acabamos de describir, por lo que los roles cambian y esta vez es el gato el que pierde. Por lo tanto, el gato gana si y solo si n no es múltiplo de $k+1$ en este caso, como queríamos.

Finalmente, por el Lema 2, vemos que los k tales que $v_2(k+1)$ es impar no funcionan, ya que si funcionaran, por el Lema 1, el gato debería perder cuando $n = k+1$. Por otro lado, por el Lema 3, los k con $v_2(k+1)$ par cumplen que el gato tiene estrategia ganadora para n en Wim 2 si y solo si la tiene en Wim. Por lo tanto, los posibles valores de k son los que cumplen que $v_2(k+1)$ es par, como queríamos. $\square$