Manipulaciones algebraicas

Luis Modes
luisalbertomodes22@gmail.com

12 de noviembre de 2024

1. Notación

- $1, 2, 3, a, b, c, x, y, z$
- $+, -, \cdot, =, \neq, >, <, \geq, \leq$
- π, e, ϕ
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}, \sum_{i\neq j}^{n}, \sum_{a\in A}, \sum_{\text{sim}}, \sum_{\text{cíc}}, \prod_{i=1}^{n}$
- $P(x), f(x), P(x,y), (x,y,z)$
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^2$
- $n!, \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$
- $|A|, A\cup B, A\cap B, A\setminus\{a\}$

2. Identidades

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dfrac{(a+b+c)}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2)$
- $2abc + \displaystyle\sum_{\text{sim}} a^2b = (a+b+c)(ab+ac+bc) - abc = (a+b)(a+c)(b+c)$
- $a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b = -(a-b)(b-c)(c-a)$
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$
- $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

- $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$
- $\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{c-a}{c+a} = -\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$
- $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ac(c^2 - a^2) = -(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
- $2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

Teorema 2.1: Un truco con fracciones

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

- Factorizar
- Completar el cuadrado perfecto
- Notar simetrías

Problema 2.1. Pruebe que si $a + b + c = 0$, entonces

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Problema 2.2 (OPM 2018 P4). Pruebe que 3999991 y 1000343 no son primos.

Problema 2.3. Demostrar que $n^4 - 22n^2 + 9$ es un número compuesto para cualquier entero n.

Problema 2.4 (Ibero 1985 P4). Si $x \neq 1, y \neq 1, x \neq y$ y

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$$

muestre que ambas fracciones son iguales a $x + y + z$.

Problema 2.5. Sean x, y, z números reales tales que $x \neq y$ y

$$x^2(y + z) = y^2(x + z) = 2021$$

Determine el valor de $z^2(x + y)$.

Problema 2.6. Encuentre todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= w \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

3. Polinomios

Teorema 3.1: Polinomios

Un *polinomio* $P(x)$ es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$. A n le llamamos el *grado de* P, y a cualquier número complejo r tal que $P(r) = 0$ le llamamos una *raíz de* P.

Teorema 3.2: Teorema Fundamental del Álgebra

Si P tiene grado n, entonces tiene exactamente n raíces complejas (algunas posiblemente repetidas).

Teorema 3.3: Factorización de un polinomio

Si las raíces de un polinomio son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces el polinomio puede escribirse como

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Teorema 3.4: Fórmula general

Si $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, c son reales, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en particular,

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces el polinomio tiene dos raíces reales distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces el polinomio tiene una sola raíz real doble.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces el polinomio no tiene raíces reales.

Teorema 3.5: Relaciones de Vieta

- Si r, s son las raíces del polinomio $x^2 + bx + c$, entonces

$$\begin{aligned} r + s &= -b \\ rs &= c \end{aligned}$$

- Si r, s, t son las raíces del polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$, entonces

$$\begin{aligned} r + s + t &= -a \\ rs + st + rt &= b \\ rst &= -c \end{aligned}$$

- Fijarse en las raíces
- Fijarse en los coeficientes (signo, paridad, ...)
- Factorizar
- Vieta
- Fórmula general

Problema 3.1 (URSS 1986 P1). Las raíces del polinomio $x^2+ax+b+1$ son números enteros. Muestre que a^2+b^2 no es un primo.

Problema 3.2 (Alemania 1970). Sean p, q números reales, con $p \neq 0$ y a, b, c las raíces del polinomio $px^3 - px^2 + qx + q$. Muestre que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = -1$$

Problema 3.3. Halle todas las parejas de enteros (m, n) tales que

$$m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$$

Problema 3.4. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Muestre que si $P(0)$ y $P(1)$ son impares, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.

4. Inducción

Teorema 4.1: Inducción

Si la proposición $P(m)$ es cierta y la proposición $P(n)$ implica la proposición $P(n+1)$ para todo $n \geq m$, entonces todas las proposiciones

$$P(m), P(m+1), P(m+2), \ldots$$

son ciertas.

Teorema 4.2: Inducción fuerte

Si la proposición $P(m)$ es cierta y las proposiciones $P(m), P(m+1), \ldots, P(n)$ implican la proposición $P(n+1)$ para todo $n \geq m$, entonces todas las proposiciones

$$P(m), P(m+1), P(m+2), \ldots$$

son ciertas.

- Útil cuando el problema nos pide demostrar algo para n que es fácil de mostrar para casos pequeños
- Nunca olvidar la base de inducción
- Inducción fuerte

Problema 4.1 (Fórmula de Gauss). Sea n un entero positivo. Demuestre que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Problema 4.2 (Suma de impares). Sea n un entero positivo. Demuestre que

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Problema 4.3 (Suma de cuadrados). Sea n un entero positivo. Demuestre que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Problema 4.4 (Suma de cubos). Sea n un entero positivo. Demuestre que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Problema 4.5. Sea n un entero. Demuestre que $n^3 - n$ es un múltiplo de 6.

Problema 4.6. Sea a un real tal que $a + \dfrac{1}{a}$ es un entero. Muestre que $a^{2021} + \dfrac{1}{a^{2021}}$ también es entero.

5. Trabajando en $\mathbb{Z}$ o en $\mathbb{Q}$

- Divisibilidad
- Agrupar y factorizar
- Tamaño y asumir orden (sin perder generalidad)
- Considerar el mcd
- Reducir el grado de los polinomios
- Eliminar los pisos y techos preferiblemente
- Inducción
- La suma es cerrada en $\mathbb{Z}$ y la multiplicación es cerrada en $\mathbb{Q}$

Problema 5.1. Sea x un número real y n un entero positivo. Muestre que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

Problema 5.2. Halle todas las tripletas de enteros de enteros (a, b, c) tales que

$$abc = a + b + c$$

Problema 5.3. Muestre que, si $p \geq 3$ es un primo, el numerador de

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

es divisible por p.

Problema 5.4. Halle todos los números irracionales a tales que $a^2 + 2a$ y $a^3 - 6a$ sean números racionales.

Problema 5.5. ¿Puede $a+b+c+d$ ser un número primo siendo a, b, c, d enteros positivos tales que $ab = cd$?

Problema 5.6 (Irán 2005). Sean $n, p > 1$ enteros positivos y p un primo. Si n divide a $p-1$ y p divide a $n^3 - 1$, pruebe que $4p - 3$ es un cuadrado perfecto.

Problema 5.7 (Ibero 2006 P4). Halle todas las parejas (a, b) de enteros positivos tales que $2a - 1$ y $2b + 1$ son primos relativos y $a + b$ divide a $4ab + 1$.

Problema 5.8 (URSS 1987 P5 modificado). Demostrar que para cualquier entero positivo n el número

$$1^{2021} + 2^{2021} + \cdots + n^{2021}$$

no es divisible por $n + 2$.

Problema 5.9 (APMO 2011 P1). Sean a, b, c enteros positivos. Pruebe que es imposible que los tres números $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$ y $c^2 + a + b$ sean cuadrados perfectos.

Problema 5.10. Halle todas las $n-$tuplas de enteros positivos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tales que

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2$$

para todo $1 \leq k \leq n$.

6. Desigualdades

Teorema 6.1: Los cuadrados siempre son positivos

Si x es un número real, entonces $x^2 \geq 0$.

Teorema 6.2: Media Aritmética - Media Geométrica ($MA - MG$)

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros no negativos, entonces

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

y la igualdad se da si o solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Teorema 6.3: Desigualdad triangular

- Si a, b, c son los lados de un triángulo, entonces

$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a \end{aligned}$$

- Si x, y son números reales, entonces

$$|x| + |y| \geq |x + y|$$

Teorema 6.4: Sustituciones comunes

- Si a, b, c son los lados de un triángulo, entonces existen reales positivos x, y, z tales que

$$\begin{aligned} a &= y + z \\ b &= x + z \\ c &= x + y \end{aligned}$$

- Si $a + b + c = 0$, entonces existen reales positivos x, y, z tales que

$$\begin{aligned} a &= x - y \\ b &= y - z \\ c &= z - x \end{aligned}$$

- Si $abc = 1$, entonces existen reales x, y, z tales que

$$\begin{aligned} a &= \frac{x}{y} \\ b &= \frac{y}{z} \\ c &= \frac{z}{x} \end{aligned}$$

- $MA - MG$
- Asumir orden (sin perder generalidad)
- Asegurarse de utilizar las condiciones del problema
- Normalizar
- Sustituciones
- Llevar todo a un lado de la desigualdad y mostrar que la expresión es positiva
- Expandir

Problema 6.1. Pruebe que si a es un real positivo, entonces

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Problema 6.2. Si a, b, c son reales positivos tales que $abc = 1$, demuestre que

$$a + b + c \geq 3$$

Problema 6.3. Si a, b, c son reales positivos, demuestre que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Problema 6.4. Pruebe que si a, b, c son los lados de un triángulo, entonces

$$abc \geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$$

Problema 6.5. Sean a, b, c números reales no negativos. Muestre que

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ac)$$

Problema 6.6. Halle todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} 2xy - z^2 &\geq 1 \\ z - |x + y| &\geq -1 \end{aligned}$$

Problema 6.7 (Brasil 2001 P1). Sean a, b, c reales positivos. Muestre que

$$(a + b)(a + c) \geq 2\sqrt{abc(a + b + c)}$$

7. Problemas

Problema 7.1 (Centro 2005 P2). Muestre que la ecuación

$$a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - c^2 - a^2 = 2005$$

no tiene soluciones enteras.

Problema 7.2 (Centro 2011 P4). Halle todos los enteros positivos p, q, r tales que p y q son números primos y

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(p+1)(q+1)} = \frac{1}{r}$$

Problema 7.3 (Centro 2020 P5). Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un entero positivo y sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ reales positivos tales que $x_1x_2 \cdots x_k = 1$. Pruebe que

$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) \geq kP(1)$$

Problema 7.4 (Centro 2017 P5). Susana y Brenda juegan a escribir polinomios en un tablero. Susana empieza, y juegan por turnos.

- En el turno de preparación (turno 0), Susana elige un entero positivo n_0 y escribe el polinomio $P_0(x) = n_0$.
- En el turno 1, Brenda elige un entero positivo n_1, distinto a n_0, y escribe el polinomio $P_1(x) = n_1x + P_0(x)$ o el polinomio $P_1(x) = n_1x - P_0(x)$.
- En general, en el turno k, la jugadora correspondiente elige un entero positivo n_k, distinto a $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$, y escribe el polinomio $P_k(x) = n_kx^k + P_{k-1}(x)$ o el polinomio $P_k(x) = n_kx^k - P_{k-1}(x)$.

La primera jugadora en escribir un polinomio con al menos una raíz entera gana. Halle y describa una estrategia ganadora.

Problema 7.5 (Centro 2010 P5). Si p, q, r son números racionales distintos de 0 tales que $\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{qr^2} + \sqrt[3]{rp^2}$ es un número racional distinto de 0, pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

Problema 7.6 (Centro 2012 P3). Sean a, b, c números reales que satisfacen $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 1$ y $ab + bc + ac > 0$. Muestre que

$$a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ac} \geq 4$$

Problema 7.7 (Centro 2010 P5). Decimos que un número es *irie* si puede ser escrito como $1+\dfrac{1}{k}$ para algún entero positivo k. Pruebe que todo entero $n \geq 2$ puede ser escrito como el producto de r números irie distintos para todo entero $r \geq n-1$.

Problema 7.8 (Centro 2018 P3). Sean x, y números reales tales que $x-y$, x^2-y^2, x^3-y^3 son todos primos positivos. Pruebe que $x-y=3$.

Problema 7.9 (Centro 2011 P5). Si x, y, z son números positivos tales que

$$x+\frac{y}{z}=y+\frac{z}{x}=z+\frac{x}{y}=2$$

halle todos los posibles valores de $x+y+z$.

Problema 7.10 (Centro 1999 P5). Sea a un entero positivo impar mayor a 17 tal que $3a-2$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que existen enteros positivos distintos b, c tales que $a+b, a+c, b+c$ y $a+b+c$ son cuatro cuadrados perfectos.

Problema 7.11 (Centro 2014 P3). Sean a, b, c y d números reales distintos dos a dos tales que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$$

y $ac=bd$. Halle el máximo valor posible de

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$$

Problema 7.12 (Centro 2019 P5). Sen a, b, c reales positivos tales que $a+b+c=1$. Pruebe que

$$a\sqrt{a^2+6bc}+b\sqrt{b^2+6ac}+c\sqrt{c^2+6ab} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

8. Fuentes y textos sugeridos

- Para aprender **álgebra básica**, cualquier libro escolar de álgebra, como por ejemplo *Álgebra de Baldor*
- Para aprender sobre **álgebra de olimpiadas**, *Álgebra* de Radmila Bulajich Manfrino
- Para aprender sobre **desigualdades de olimpiadas**, *Desigualdades* de Radmila Bulajich Manfrino
- Para **practicar**, problemas de la *Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC o Centro)*, de los textos previamente citados y los sugeridos por algún instructor del programa