Geometría de la buena para el equipo Centro 2020

Luis Modes
luisalbertomodes22@gmail.com

2 de noviembre de 2020

Como ya casi es la Centro 2020, el objetivo de esta sesión es explicar brevemente la similitud o *spiral similarity*, dar algunos consejos y finalmente poner a prueba todo lo que saben de geometría hasta ahora.

1. Similitud o *Spiral Similarity*

Decimos que dos figuras son *similares* si podemos transformar una en la otra mediante una homotecia y una rotación. Al punto desde el cual hacemos dicha homotecia y rotación le llamamos *centro de similitud* y decimos que las figuras son similares desde él. La técnica que aprenderemos aquí, sin embargo, es particular para el caso en que las figuras similares son triángulos y el centro de similitud es un vértice que ambos tienen en común. La manera más intuitiva de ver esto es como dos triángulos semejantes pegados por un vétice.

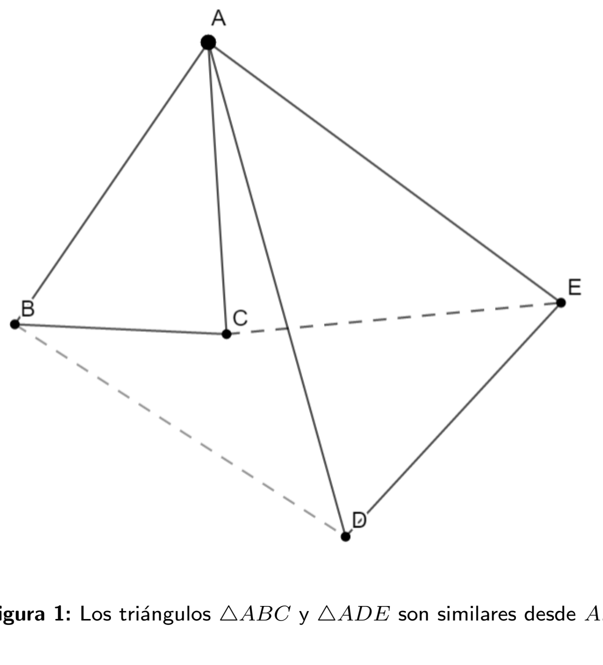
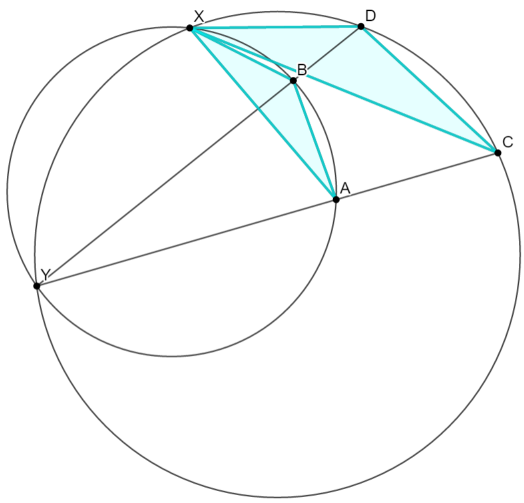
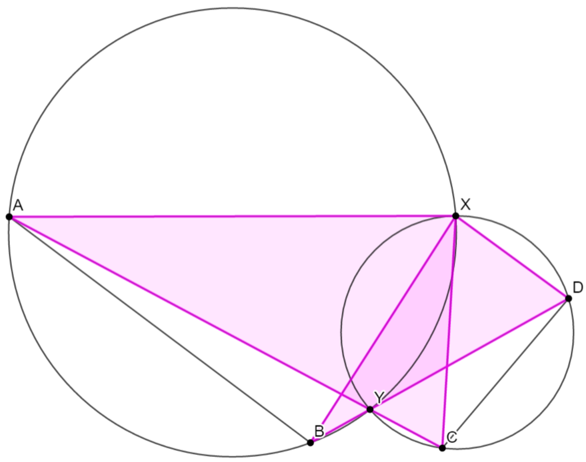


Figura 1: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son similares desde A.

De la figura anterior, entendemos por qué en inglés se le llama *spiral similarity*, pues es como una semejanza en forma de espiral. Notemos algo muy importante: las similitudes vienen en pares. En efecto, en la figura anterior, ¡$\triangle ABD$ y $\triangle ACE$ también son similares! Muy bonito y todo, ¿pero para qué sirve? Bueno, resulta que podemos hallar similitudes siempre que tengamos dos circunferencias que se intersecten y dos rectas a través de uno de sus puntos de intersección:

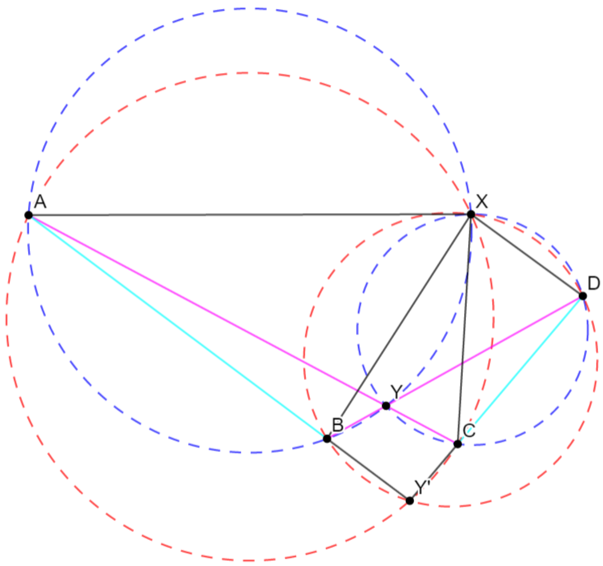




En las figuras anteriores, dos circunferencias se cortan en X y Y, y dos rectas a través de Y cortan a la primera circunferencia en A, B y a la segunda en C, D, respectivamente, como se muestra. Resulta que

- $\triangle XAB$ y $\triangle XCD$ son similares
- $\triangle XAC$ y $\triangle XBD$ son similares

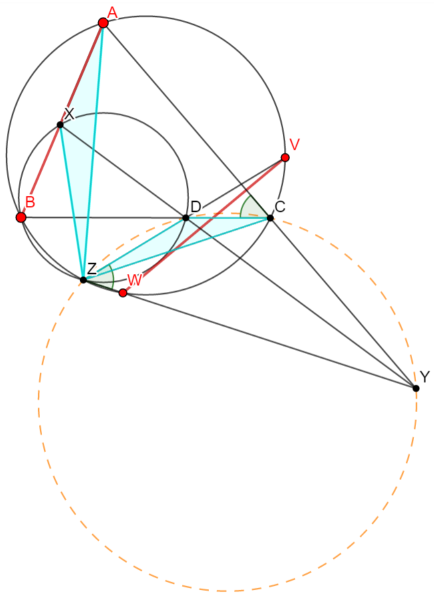
Eso ya de por sí es sorprendente. Sin embargo, lo más loco es que lo opuesto también se cumple, es decir, si $\triangle XAB$ y $\triangle XCD$ son similares, sus circuncírculos se cortarán en el mismo punto que las rectas que unen sus vértices correspondientes. O sea, como A corresponde a C y B corresponde a D, si AC y BD se cortan en Y, sus circuncírculos se cortarán en Y. (¡Y lo mismo pasa con $\triangle XAC$ y $\triangle XBD$!).



En conclusión, como ven, la similitud es algo simple y aun así muy útil. Aunque generalmente le tememos a los problemas de geometría de muchas circunferencias, ya vemos que su presencia muy probablemente genere pares de triángulos similares. Y, cuando tengamos un par de triángulos similares, ¡ya tenemos 4 cíclicos! Poderoso, ¿no?

Ejemplo 1. (APMO 2015/1) Sea ABC un triángulo y sea D un punto en el lado BC. Una recta por D corta al lado AB en X and al rayo AC en Y . El circuncírculo del triángulo BXD corta al circuncírculo ω del triángulo ABC denuevo en el punto Z distinto de B. Las rectas ZD y ZY cortan a ω denuevo en V y W, respectivamente. Pruebe que $AB = VW$.

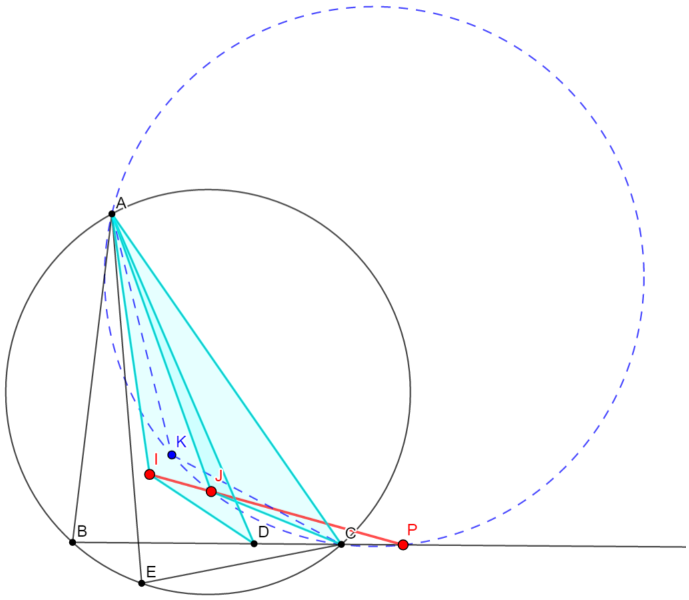
Solución:



Note que $\triangle ZAX$ y $\triangle ZCD$ son similares desde Z, por lo que $ZYCD$ es cíclico. Finalmente, como AB y WV son cuerdas en ω comprendidas por los ángulos $\angle ACB$ y $\angle WZV$, respectivamente, y $\angle ACB = \angle ACD = \angle YZD = \angle WZV$, terminamos. □

Ejemplo 2. (CMC 2020/3) Sea ABC un triángulo tal que $AB > BC$ y sea D un punto variable en el segmento BC. Sea E un punto en el circuncírculo del triángulo ABC en el lado opuesto a A con respecto a BC de tal modo que $\angle BAE = \angle DAC$. Sea I el incentro del triángulo ABD y sea J el incentro del triángulo ACE. Pruebe que la recta IJ pasa por un punto fijo que no depende de D.

Solución:



Sea P el punto en que IJ corta a BC y K el incentro de $\triangle ABC$. Como

$$\angle IAD = \frac{\angle BAD}{2} = \frac{\angle BAC - \angle DAC}{2} = \frac{\angle BAC - \angle BAE}{2} = \frac{\angle EAC}{2} = \angle JAC$$

y

$$\angle DIA = 90^\circ + \frac{\angle DBA}{2} = 90^\circ + \frac{\angle CBA}{2} = 90^\circ + \frac{\angle CEA}{2} = \angle CJA,$$

$\triangle AID$ y $\triangle AJC$ son semejantes, y por tanto similares desde A. Luego, P está sobre el circuncírculo de AJC. Sin embargo,

$$\angle CKA = 90^\circ + \frac{\angle CBA}{2} = 90^\circ + \frac{\angle CEA}{2} = \angle CJA,$$

por lo que K también está sobre el circuncírculo de $\triangle AJC$, es decir, A, K, J, C, P son concíclicos. Como esta circunferencia debe ser el circuncírculo de AKC, que es fijo, P es la intersección de una circunferencia fija con la recta fija BC. Por lo tanto, P es fijo, y como IJ siempre pasa por P, terminamos. □

2. Temas recurrentes en la Centro

- *Angle chasing* o Anguleo
- Cíclicos
- Teoremas básicos (Thales, Pitágoras, Triángulos especiales, Teorema de la Bisectriz)
- Geometría del triángulo (Congruencia, Semejanza, Ceva, Menelao, Áreas)
- Geometría del círculo (Potencia de punto, Ángulos en la circunferencia)
- Paralelogramos
- Homotecia

3. Consejos

- Hacerse TODOS los problemas de geometría que hayan salido en la Centro (si no lo han hecho, al menos hagan los más recientes).
- No debería salir un solo problema de geometría ni tan difícil ni fuera de tu alcance en la Centro, por lo que debes tratar de usar las técnicas que conoces. Confía en ti. No te dejes intimidar ni te desvíes intentando brujadas.
- Trabaja con dibujos grandes, claros y precisos (hechos a regla y compás preferiblemente). Muchas veces necesitarás hacer más de un dibujo, e incluso puedes hacer dibujos adicionales a mano alzada para ver cómo están los puntos, familiarizarte más con el problema, tratar de verificar más o menos conjeturas o respaldar tu intuición.
- Apunta todo lo que conjetures o demuestres. Esto quizá no importa mucho cuando te sale el problema e igual tienes que redactarlo en limpio. Sale a relucir más que todo a la hora de pescar puntos cuando no se resuelve el problema (o crees que no lo resolviste).
- Si ya tienes un dibujo que se entiende, no lo tienes que volver a hacer en la página de solución.
- Cuidado con los métodos analíticos. Si no llegas a nada, puede que no te den ni un punto. Trata siempre con geometría euclídea de la linda y simple primero.
- SIEMPRE considera el circuncírculo de ABC y no olvides prolongar segmentos.
- Aunque seas bueno en geometría, no te tires directo al problema 3 o 6 sin intentar (preferiblemente hacer) antes el 1 y el 2 (el 4 y el 5).
- ¡Disfruta la geometría! Si resuelves suficientes problemas y la comprendes, aunque no sea tu área favorita, llegarás a disfrutarla y a mejorar en ella.

4. Problemas

1. (Geometry Revisited/ pág 26 P5) Se trazan dos rectas a través del vértice A de un triángulo equilátero ABC. Si estas rectas cortan a la semicircunferencia exterior al triángulo con diámetro BC en tres arcos de igual longitud, pruebe que estas dos rectas trisecan al segmento BC.

2. (Canadá 1997/4) El punto O está situado en el interior del paralelogramo $ABCD$ de tal modo que $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Pruebe que $\angle OBC = \angle ODC$.

3. (Shortlist 2019/G1) Sea ABC un triángulo. La circunferencia Γ pasa por A, corta a los segmentos AB y AC denuevo en los puntos D y E, respectivamente, e intersecta al segmento BC en F y G de tal manera que F está entre B y G. La tangente al circuncírculo de BDF en F y la tangente al circuncírculo de CEG en G se cortan en T. Suponga que los puntos A y T son distintos. Pruebe que la recta AT es paralela a BC.

4. (Ibero 1997/5) En el triángulo acutángulo $\triangle ABC$, sean AE y BF sus alturas y H su ortocentro. La recta simétrica a AE con respecto a la bisectriz interna de $\angle BAC$ y la recta simétrica a BF con respecto a la bisectriz interna de $\angle CBA$ se cortan en el punto O. Las rectas AE y AO cortan denuevo al circuncírculo de $\triangle ABC$ en los puntos M y N, respectivamente. Sean P la intersección de BC con HN, R la intersección de BC con OM, y S la intersección de HR con OP. Muestre que $AHSO$ es un paralelogramo.

5. (APMO 2007/2) Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle BAC = 60°$ y $AB > AC$. Sean I el incentro y H el ortocentro del triángulo ABC. Pruebe que $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

6. (Ibero 1999/5) Un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia con centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

a) Muestre que OA es perpendicular a PQ.

b) Si M es el punto medio de BC, muestre que $AP^2 = 2AD \cdot OM$.

7. (APMO 2011/2) Cinco puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 yacen en el plano de tal modo que no hay tres de ellos colineales. Determine el máximo valor posible que el menor de los ángulos $\angle A_iA_jA_k$ puede tomar, donde i, j, k son enteros distintos entre 1 y 5.

8. (Sharygin Ronda 1 2017/6) Sean $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $AC = BD = AD$, E y F los puntos medios de AB y CD, respectivamente, y O el punto de intersección de las diagonales de $ABCD$. Pruebe que EF pasa por los puntos de contacto del incírculo del triángulo AOD con AO y OD.

9. (Sharygin Ronda 1 2018/5) El vértice C de los triángulos equiláteros ABC y CDE está sobre el segmento AE, y los vértices B y D están del mismo lado con respecto a este segmento. Los circuncírculos de estos triángulos, con centro en O_1 y O_2, se cortan por segunda vez en el punto F. Las rectas O_1O_2 y AD se cortan en K. Pruebe que $AK = BF$.

10. (Sharygin Ronda 1 2020/4) Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con bases AB y CD. Pruebe que el baricentro del triángulo ABD está sobre CF, donde F es la proyección de D sobre AB.

11. (EGMO 2019/4) Sea ABC un triángulo con incentro I. La circunferencia por B tangente a AI en I corta al lado AB denuevo en P. La circunferencia por C tangente a AI en I corta al lado AC denuevo en Q. Pruebe que PQ es tangente al incírculo de ABC.

12. (México 2018/1) Sean A y B dos puntos sobre la recta ℓ, M el punto medio del segmento AB, y X otro punto sobre el segmento AB distinto de M. Sea Ω un semicírculo con diámetro AB. Considere un punto P en Ω y sea Γ la circunferencia que pasa por P y X de tal modo que es tangente a AB. Sea Q el segundo punto de intersección de Ω y Γ. La bisetriz interna de $\angle PXQ$ corta a Γ denuevo en R. Sea Y un punto en ℓ tal que RY es perpendicular ℓ. Muestre que $MX > XY$.

13. (Beneleux 2020/3) Sea ABC un triángulo. La circunferencia ω_A que pasa por A es tangente a la recta BC en B. La circunferencia ω_C que pasa por C es tangente a la recta AB en B. Digamos que ω_A y ω_C se cortan denuevo en D. Sea M el punto medio del segmento BC, y sea E la intersección de las rectas MD y AC. Muestre que E está sobre ω_A.

14. (IMO 2020/1) Considere un cuadrilátero convexo $ABCD$. El punto P está en el interior de $ABCD$. La siguiente igualdad de razones se cumple:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

Pruebe que las siguientes tres rectas concurren en un punto: las bisectrices internas de los ángulos $\angle ADP$ y $\angle PCB$ y la mediatriz de AB.

15. (IMO 2018/1) Sea Γ el circuncírculo del triángulo acutángulo ABC. Los puntos D y E están sobre los segmentos AB y AC, respectivamente, de tal manera que $AD = AE$. Las mediatrices de BD y CE intersectan a los arcos menores $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ de Γ en los puntos F y G, respectivamente. Pruebe que las rectas DE y FG son paralelas o son la misma recta.

16. (APMO 2004/2) Sean O el circuncentro y H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC. Pruebe que el área de alguno de los triángulos AOH, BOH, COH es igual a la suma de las áreas de los otros dos.

5. Pistas leves

1. Digamos que las rectas cortan a BC en D y E y a la semicircunferencia en D' y E', respectivamente. Considera M el punto medio de DE y M' el punto medio de $D'E'$ (¡Quizá las alturas nos ayuden de algo!)

2. Dos ángulos que suman $180°$... ¿Dónde vemos eso en la geometría?

3. Haz un dibujo bonito. ¿Ves el trapecio isósceles?

4. Esto es solo geometría del triángulo. Fíjate que O es el circuncentro, $MN \parallel BC$ y P es el punto medio de BC.

5. Nos dan ángulos y te piden ángulos. Aparte de a anguleo... ¿no te huele a cíclicos?

6. La parte a) es simple de ver por anguleo o notando que $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ y que AO y AH son isogonales.

7. La respuesta es $36°$. Hay un camino directo pero trabajoso, que consiste en considerar si la envolvente convexa (el polígono convexo más pequeño que contiene a los cinco puntos) es un pentágono, un cuadrilátero o un triángulo. Para la solución bonita y mágica, solo diré que, curiosamente, $36 = \frac{360}{10}$...

8. Como se trata del incírculo, podemos calcular todos los segmentitos involucrados en el problema en función de AD, AO y DO. Segmentos y colinealidad... ¿A qué te suena?

9. Por similitud (¡!), es claro que F pertenece a ambos circuncírculos. Además, por eje radical, $CF \perp O_1O_2$,

10. El peligro de los enunciados cortos es que no nos dan casi nada. Para unir ese baricentro aparentemente arbitrario con el resto del problema, digamos que M, N, P, son los puntos medios de BD, AD y AB, respectivamente, y tracemos las medianas.

11. Que tengan que probar una tangencia solo quiere asustarlos. Ignoren eso por ahora. Viendo lo evidente primero, ¿ya notaron que AI es el eje radical de ambas circunferencias y que por tanto $PBCQ$ es cíclico?

12. No se dejen intimidar por la desigualdad geométrica. Cuando nos piden demostrar cosas así brujas, traten de ser observadores. Hagan un buen dibujo y comiencen a conjeturar qué cosas podrían ser ciertas. Luego, procedan a tratar de demostrarlas. En el caso de este problema, cuando vean lo que tienen que ver, anguleo servirá para probarlo.

13. Probar que dos rectas concurren sobre una circunferencia es un poco delicado. Algo que pueden hacer en este caso es decir que E' es la intersección de AC con ω_A. Ahora, tenemos un punto sobre una circunferencia, y el problema se reduciría a probar que $E' = E$, es decir, que $E' - D - M$ son colineales. Creo que es un panorama más amigable.

14. No se obsesionen tratando de hacer el dibujo perfecto y hagan uno decente al ojo con regla. Ahora, a meditar: si es un problema 1, no debe ser tan difícil... ¿Cuál es el punto más conocido sobre una mediatriz y que haría más sentido en esta situación?

15. Lo resolví de una manera tan complicada y era un problema tan simple... Como casi todo está sobre una circunferencia y además prolongar es algo que se nos debe ocurrir siempre, prolonguemos FD y GE hasta que corten denuevo a la circunferencia en D' y E', respectivamente.

16. No sucumbas ante la tentación de querer hallar todas las longitudes/áreas por fuerza bruta. En lugar de eso, como trabajamos con las áreas de 3 triángulos con la misma base, es más intuitivo considerar A', B', C' los pies de las alturas desde A, B, C, respectivamente, a OH.

6. Pistas claves

1. $\triangle AD'E' \sim \triangle ADE$ a razón $3:2$, pues

$$\frac{AM'}{AM} = \frac{AM + MM'}{AM} = 1 + \frac{MM'}{AM} = 1 + \frac{D'E'}{BC} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. ¡Cíclicos! Construye un punto P' afuera de $ABCD$ tal que $\triangle P'BA \cong \triangle OCD$.

3. Demuestra por anguleo que $\triangle TFG \cong \triangle AGF$.

4. $ON = OM$ y $RH = RM$. Ahora, por anguleo, no es difícil ver que $HS \parallel AO$.

5. $IBCH$ es cíclico.

6. Para la parte b), nota que $\triangle APF \sim \triangle ABP$. Potencia de punto y el hecho de que $AH = 2OM$ te ayudarán a terminar.

7. La primera solución saldrá eventualmente por casitos. Para la otra solución, considera cualquier punto en el plano y traza a través de él 10 rectas paralelas a los 10 segmentos A_iA_j. ¿Hace falta que diga más?

8. Dos Menelaos y nos vamos a casa felices.

9. Si juegas un rato conjeturando congruencias de triángulos, llegas a que $\triangle CAK \cong \triangle CBF$ si y solo si AKO_1C es cíclico, y esto es cierto, pues $\angle ACO_1 = \angle AKO_1$.

10. Ahora tenemos muchos puntos medios y por ende más paralelas aparte de AB y CD. Esto huele a homotecia... Es más, si hicieron un buen dibujo, ya deben de haber descubierto el secreto de $\triangle BCD$ y $\triangle NFP$.

11. I es el $A-$excentro de $\triangle APQ$.

12. Noten que RX es bisectriz interna de $\angle MRY$. El teorema de la bisectriz termina el trabajo.

13. Tangentes y un punto medio... estos se conocen de algún lado... ¡Ah! Como la potencia de punto debe ser la misma, el eje radical de dos circunferencias corta al segmento tangente a ambas en su punto medio. Inspirados por eso, traten de probar que BC es tangente al circuncírculo de $DE'C$ por anguleo (viendo que $\angle DE'C = \angle DCM$).

14. Noten que, si O es el circuncentro de $\triangle PAB$, $AOPD$ y $OBCP$ son cíclicos.

15. $E'DED'$ es cíclico.

16. Digamos que A te quedó de un lado distinto a B y C con respecto a OH. Entonces, si defines a M como el punto medio de BC y a M' como la proyección de M sobre OH, fíjate que MM' es base media de $C'B'BC$ y además, como $\triangle OMM' \sim \triangle HAA'$, $2MM' = AA'$.