Material de entrenamiento para la OPM 2020

Luis Modes
luisalbertomodes22@gmail.com

1 de febrero de 2021

Este es un PDF para aquellos estudiantes de la AIPCV que vayan a participar en la Olimpiada Panameña de Matemáticas este año. Si tienen alguna pregunta, comentario o quieren informarme sobre algún error, ¡contáctenme!

Índice

1. Introducción

Este PDF se los escribo para que tengan a mano toda la teoría que necesitan para poder prepararse para la OPM. Y... ¡por favor no se asusten por la longitud del PDF! Cuando les digo TODA la teoría necesaria, hablaba en serio. Sin embargo, no significa que tengan que leerlo todo. Como les he dicho antes, lo que más importa para la olimpiada es la práctica. Además, seguramente hay varias cosas que ya conocen de la escuela. Aquí les dejo una recomendación para que más o menos se guíen si no tienen ni idea qué leer:

- Léanse todos la Sección 2 y la Sección 5 (casi no se enseña en la escuela).
- Si eres de 7° u 8°, te recomiendo que leas la Subsección 3.1, la Sección 4 hasta la Subsección 4.5 (inclusive) y la Subsección 6.1.
- Si eres de 9°, revisa, además, la Subsección 3.2 y la Subsección 4.6
- Si eres de 10°, revisa toda la Sección 3, toda la Sección 6 y la Subsección 4.7.
- Si eres de 11° o 12°, te recomiendo que revises todas las secciones.

La idea es que lo usen como mejor les funcione. Un consejo es que vean los teoremas y pasen al siguiente si ya los conocen. También sería ideal que intenten los ejemplos y luego vean la solución. Incluí problemas al final de cada sección, pero son más que todo para reforzar conceptos. Denle prioridad a practicar de la Canguro.

Como hasta los problemas tienen una historia, aquí incluiré algunas abreviaturas que usaré para decir de dónde viene un problema.

- **OPM Fase I**: Primera Fase de la Olimpiada Panameña de Matemática. Sí, nuestra querida olimpiada nacional solía (y ojalá vuelva a) tener dos fases antes de la pandemia. La Fase I era una prueba de entre 20 y 30 problemas de selección múltiple.
- **OPM Fase II**: Segunda Fase de la Olimpiada Panameña de Matemática. Consistía en una prueba de 3 a 4 problemas de desarrollo.
- **Manual**: Manual de Olimpiada. Este es un libro excelente que les recomendaría conseguir si no estuviéramos en una pandemia. Admito que el libro me sirvió de guía tanto para entrenar hace años como para hacer este PDF. (Para más referencias, el libro *Manual de Olimpiada* fue escrito por Lydia Burgoa, de la Fundación Olimpiada Panameña de Matemática, y puede conseguirse en el Machetazo).
- **Baldor**: Álgebra y Geometría de Baldor. Para mí estos libros son excelentes, ya que son como un puente entre problemas de escuela y problemas de olimpiada. Además, explican muy bien los temas.
- **Sáb. de Octubre**: Sábados de Octubre. Cuando ganas medalla en la OPM, eres invitado a participar en los famosos *Sábados de Octubre*, en los que nos presentan problemas cuya dificultad está entre la OPM y las olimpiadas internacionales.
- **Canguro**: Olimpiada Canguro Matemático. Una olimpiada internacional de selección múltiple. Les aconsejo que practiquen de ahí.
- **Luis Modes**: Problemas que yo mismo creé con todo el amor del mundo.
- **Instagram**: ¿Qué?... ¿Nunca han encontado problemas interesantes en Instagram?
- Si pongo otra referencia, de seguro se entenderá a qué me refiero, y, si no pongo nada, es porque es un simple ejercicio o no recuerdo de dónde viene.

Y bueno, sin más rodeos, ¡empecemos!

2. Lo básico

Conozcamos algunos conceptos básicos.

Definición 2.0.1: Los enteros

A los números con los que contamos $\{1, 2, 3, \dots\}$, el 0 y los números negativos $\{-1, -2, -3, \dots\}$ se les conoce como *números enteros* y se representan con $\mathbb{Z}$.

Es importante notar que si sumamos, restamos o multiplicamos dos enteros, el resultado seguirá siendo un entero. Esto ya no siempre es cierto si dividimos. Por ejemplo, si dividimos 1 entre 3, nos da $\frac{1}{3}$ =0.333... El resultado será un *número racional*.

Definición 2.0.2: Los racionales

A los números que pueden representarse como la división de dos números enteros (o sea, las fracciones) $\{5, 2\frac{1}{4}, 0.5, 0.3333..., \dots\}$ se les conoce como *números racionales* y se representan con $\mathbb{Q}$.

Si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos racionales, el resultado será un racional. Sin embargo, si extraemos, por ejemplo, la raíz cúbica, el resultado no necesariamente será racional. Por ejemplo, si a 2 le extraemos la raíz cúbica, el resultado será $\sqrt[3]{2}$ =1.2599... El resultado será un *número real*.

Definición 2.0.3: Los reales

A cualquier número que represente una cantidad o la medida de algo $\{1, \frac{4}{9}, \pi, \sqrt[3]{2}, \dots\}$ lo conocemos como un *número real* y lo representamos con $\mathbb{R}$.

Y bueno, si hacemos prácticamente cualquier operación entre números reales, nos dará un número real. Solo tenemos que tener cuidado al sacar raíces de índice par, pues cosas como $\sqrt{-1}$ no son números reales.

También existe el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, aunque hay controversia con respecto a este conjunto. Se define como el conjunto de los números con los que contamos. Algunos dicen que es $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y otros dicen que es $\{1, 2, 3, \dots\}$.

En fin, quizá notaron que todos los números naturales también son enteros, que todos los números enteros también son racionales, y que los racionales también son reales. Esto se representa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ son conjuntos numéricos, y el símbolo $\subset$ significa "está contenido en". Para decir que un número pertenece a un conjunto, utilizamos $\in$, y para decir que no pertenece, $\notin$. Por ejemplo, $0 \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \in \mathbb{R}$. El signo $=$, como ya sabemos, significa *igual a*, $\neq$ significa *distinto a* y $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ significan *mayor a*, *menor a*, *mayor o igual a* y *menor o igual a*, respectivamente.

Ahora, en matemáticas, a un enunciado que tomamos por cierto y el cual usamos como base para todo lo demás lo llamamos *axioma*. Los axiomas no requieren demostración, ya que generalmente son cosas muy obvias. Por ejemplo, *El todo es mayor o igual que todas sus partes*. Los enunciados que parten de los axiomas mediante la lógica y que requieren demostración se llaman *teoremas*. Este PDF de hecho es una lista de teoremas y ejemplos de cómo aplicarlos. Lastimosamente, no pude incluir la demostración de dichos teoremas por razones de tiempo, pero igual no la necesitan para utilizarlos. Si tienen curiosidad, ¡traten de demostrarlos! Y bueno, ahora que sabemos lo básico, vamos a lo nuestro.

3. Álgebra

Una manera simple de ver el álgebra es como la aritmética, pero con letras. ¿Y qué son las letras? Son cantidades generales o que no conocemos. Aunque no sepamos su valor, podemos hacer muchas cosas con ellas, ¡e incluso descubrir cuánto valen, en algunos casos!

3.1. Aritmética

Como les dije, el álgebra no es más que aritmética. Empecemos con un problema perfecto para ilustrarlo.

Ejemplo 3.1.1: OPM Fase I 2012

En un problema de la prueba de olimpiada, Aquiles cometió un error, dividió por 2 una cantidad y obtuvo 30, pero debió multiplicar por 2. ¿Cuál era la respuesta del problema?

Solución. No conocemos la cantidad que tenía Aquiles, así que llamémosla x. Si la dividió por 2 y obtuvo 30, significa que

$$\frac{x}{2} = 30$$

Ahora, como sabemos que la mitad de x es 30, $x = 60$. Entonces, ya sabemos que la cantidad que tenía Aquiles era 60. Finalmente, como lo que tenía que hacer era multiplicarlo por 2, la repuesta del problema es

$$60 \cdot 2 = 120$$

□

En el problema anterior, vimos cuál es la esencia del ágebra: usar letras para denotar cantidades que no conocemos. Sin embargo, ustedes me dirán que lo anterior no necesitaba ni siquiera considerar la x. Pudieron haberlo hecho mental, lo sé, pero no siempre será así. Por eso los exhorto a familiarizarse con las letras. Si se acostumbran, es muy fácil.

En álgebra, a los números que multiplican a las letras los llamamos *coeficientes*. Por ejemplo, si tenemos $2x$, el coeficiente de la x es 2, y si tenemos b, el coeficiente de la b es 1. A una igualdad le llamamos *ecuación*. Veamos algunas de sus propiedades.

Teorema 3.1.1: Propiedades de las ecuaciones

La ecuación tiene las siguientes propiedades:

- (Propiedad reflexiva) $a = a$
- (Propiedad simétrica) Si $a = b$, $b = a$.
- (Propiedad transitiva) Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

Si $x = y$, $z = w \neq 0$ y c es un número distinto de 0,

- $x + c = y + c$
- $x - c = y - c$
- $c \cdot x = c \cdot y$
- $\frac{x}{c} = \frac{y}{c}$
- $x^c = y^c$
- $\sqrt[c]{x} = \sqrt[c]{y}$
- $x + z = y + w$
- $x - z = y - w$
- $x \cdot z = y \cdot w$
- $\frac{x}{z} = \frac{y}{w}$

La primera, segunda y tercera propiedad son relativamnete obvias pero fundamnetales. Las usaremos mucho inconscientemente. Las demás propiedades nos ayudan mucho si queremos hallar el valor de una letra, digamos x. Hallar a x a partir de una ecuación se llama *despejar a x*. La cuarta, quinta, séptima y octava nos dicen que podemos sumarle, restarle, multiplicarle o dividirle la misma cantidad a ambos lados de la ecuación. La octava y novena nos dicen que podemos elevar a cualquier exponente o extraele cualquier raíz a ambos lados. Las últimas propiedades nos dicen que podemos “sumar, restar, multiplicar o dividir ecuaciones entre sí”. Todo esto se resume en la siguiente regla de oro:

Puedes hacer lo que quieras en una ecuación siempre y cuando hagas lo mismo de ambos lados.

Veamos todo esto en la práctica.

Ejemplo 3.1.2: Baldor

La suma de la tercera y la cuarta parte de un número equivale al doble del número disminuido en 17. Hallar el número.

Solución. Traduzcamos este problema al lenguage del álgebra. Si decimos que el número es x, “la suma de la tercera y la cuarta parte” sería

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4}$$

Ahora, si eso equivale "al doble del número disminuido en 17", que es $2x-17$, estaríamos diciendo que

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=2x-17$$

Listo, ya ahora solo debemos resolver una ecuación. Queremos el valor de x. Sin embargo, hay números que nos están estorbando, como el 3 y el 4 en los denominadores, el 2 multiplicando a la x y el 17. Aquí es donde entran en juego las propiedades de arriba. Primero, deshagámonos de esos denominadores multiplicando ambos lados por 12:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3}+\frac{x}{4} &= 2x-17\\
\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right)\cdot 12 &= (2x-17)\cdot 12\\
4x+3x &= 24x-204\\
7x &= 24x-204
\end{aligned}$$

Para tener a las x de un solo lado de la ecuación, restémosle a ambos lados $7x$:

$$\begin{aligned}
7x &= 24x-204\\
7x-7x &= 24x-204-7x\\
0 &= 17x-204
\end{aligned}$$

Por comodidad, recordemos la propiedad simétrica:

$$\begin{aligned}
0 &= 17x-204\\
17x-204 &= 0
\end{aligned}$$

Para ya dejar a la x sola, finalicemos sumándole a ambos lados 204 y luego dividiéndolos entre 17:

$$\begin{aligned}
17x-204 &= 0\\
17x-204+204 &= 0+204\\
17x &= 204\\
\frac{17x}{17} &= \frac{204}{17}\\
x &= 12
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número buscado es 12.

□

A una letra cuyo valor queremos encontrar le llamamos *incógnita*. Las ecuaciones como en el ejemplo anterior, en que la incógnita no está elevada a ningún exponente que no sea 1, son las más simples, y les llamamos *lineales*. Resolverlas se vuelve un simple ejercicio.

Ejemplo 3.1.3

Hallar el valor de x si

$$3x^2 + 7 = 19$$

Solución. Empezamos quitando lo "más lejano" a la x. Primero, nos deshacemos del 7 restándole 7 a ambos lados. Luego, nos deshacemos del 3 dividiendo ambos lados entre 3.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 7 &= 19 \\ 3x^2 + 7 - 7 &= 19 - 7 \\ 3x^2 &= 12 \\ \frac{3x^2}{3} &= \frac{12}{3} \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

Ya casi acabamos. Ahora solo extraemos la raíz cuadrada de ambos lados y nos queda

$$x = 2$$

Listo. ¿O no?... ¡Pues no! Al sacar raíces hay un detalle que debemos que tener siempre presente. ¿Recuerdan que $2^2 = 4$ pero también $(-2)^2 = 4$? Pues hay que tomar eso en cuenta en una ecuación. Entonces, obtendíamos que las respuestas son 2 y -2. Verifiquémoslo.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^2 + 7 &= 3 \cdot 4 + 7 \\ &= 19 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2)^2 + 7 &= 3 \cdot 4 + 7 \\ &= 19 \end{aligned}$$

Ambos funcionan. Por lo tanto, los posibles valores de x son 2 y -2.

□

Seguramente el ejemplo anterior tuvo un final inesperado. Aclaremos eso.

- Si $x^2 = a^2$, al sacar raíz cuadrada, debemos considerar ambos signos, es decir, $x = \pm a$. Esto ocurre con todas las raíces de índice par, como $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$, etc.
- Una incógnita puede tener más de un posible valor. En efecto, como la mitad de las veces ocurrirá eso. Sin embargo, siempre debemos verificar que cumplan la ecuación original. Puede que no siempre lo hagan.

Ejemplo 3.1.4: Manual

Ana anotó 29 puntos en el juego de baloncesto de su escuela. Ella realizó una combinación de anotaciones de 2 puntos y 3 puntos durante el juego. Si anotó 11 veces, ¿cuántas anotaciones de 3 puntos hizo?

Solución. Digamos que realizó x anotaciones de 2 puntos y y anotaciones de 3 puntos. Entonces, la cantidad de puntos que anotó será la cantidad de veces que anotó 2 puntos por 2 (porque cada una le sumará 2 puntos) más la cantidad de veces que anotó 3 puntos por 3, es decir,

$$2x + 3y$$

Sin embargo, sabemos que anotó 29 puntos, es decir,

$$2x + 3y = 29$$

Además, realizó 11 anotaciones en total, por lo que

$$x + y = 11$$

Noten que ya transformamos el problema completamente en las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 29 \qquad (1) \\ x + y &= 11 \qquad (2) \end{aligned}$$

En álgebra, a esto le llamamos *sistema de ecuaciones*, y existen procedimientos formales para resolverlos (o sea, para hallar la x y la y). Sin embargo, no los necesitamos. Con nuestra creatividad y las propiedades de las ecuaciones bastará. ¿Recuerdan lo de *sumar y restar ecuaciones entre sí*? Pues miren esto. Multipliquemos ambos lados de la ecuación (2) por 2:

$$\begin{aligned} x + y &= 11 \\ 2(x + y) &= 2 \cdot 11 \\ 2x + 2y &= 22 \end{aligned}$$

Ahora, *restémosela* a la ecuación (1):

$$\begin{aligned} (2x + 3y) - (2x + 2y) &= (29) - (22) \\ 2x + 3y - 2x - 2y &= 29 - 22 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Ana hizo 7 anotaciones de 3 puntos.

□

Aprovechemos que nos topamos con los famosos sistemas de ecuaciones para hacer algunas aclaraciones:

- Para hallar el valor de las n incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales necesitamos al menos n ecuaciones. Por ejemplo, en el ejemplo anterior teníamos 2 incógnitas y 2 ecuaciones. Por eso lo pudimos resolver.

- El método que utilizamos para resolverlo, y de hecho es el más intuitivo, es *eliminación*. Brevemente, este método consiste en lo siguiente:

  1. Multiplicamos una o ambas ecuaciones por números que nos permitan eliminar una de las dos incógnitas al sumar o restar las ecuaciones. En el ejemplo anterior, multiplicamos la ecuación (2) por 2 para que en ambas ecuaciones la x tuviera coeficiente 2.

2. Sumamos o restamos las ecuaciones y despejamos la incógnita que no se eliminó. En el ejemplo anterior, luego de deshacernos de la x, lo que hicimos fue despejar la y.
3. Finalmente, reemplazamos el valor que acabamos de hallar en cualquiera de las 2 ecuaciones y ahora hallamos el otro. En el ejemplo anterior no tuvimos que hacer esto, pues solo queríamos la y. Sin embargo, de haber querido hallar x, solo reemplazamos $y = 7$ en la ecuación (2) para obtener $x + 7 = 11$, y aquí ya es inmediato que $x = 4$.

- Y bueno, si es otro tipo de sistema de ecuaciones, deberás ingeniártelas con otros métodos (tal vez similares) para resolverlo. ¡Y recuerda siempre revisar al final que tus respuestas cumplan!

Ejemplo 3.1.5: Manual

Sean x, y, z números reales tales que

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=-3\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}&=1\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=3\end{aligned}$$

Halle el valor de $x + y + z$.

Solución. Bueno... ¿qué se supone que hagamos con todas esas fracciones? La verdad es que este sistema de ecuaciones de 3 variables y en que además todas las incógnitas están en una fracción no luce nada fácil... Sin embargo, de esto se tratan los problemas de matemática: de convertir algo que parece difícil en algo más sencillo. Miren lo que haremos. Vamos a decir que $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$ y $\frac{1}{z} = c$. Aquí simplemente estamos nombrando esas cantidades. Ahora, el sistema lucirá así:

$$a+b+c=-3 \tag{3}$$
$$a+b-c=1 \tag{4}$$
$$a-b+c=3 \tag{5}$$

Mucho más lindo, ¿no? En efecto, ahora es mucho muy fácil hallar a, b, c. Sumemos las ecuaciones (4) y (5):

$$\begin{aligned}(a+b-c)+(a-b+c)&=1+3\\ 2a&=4\\ a&=2\end{aligned}$$

Sumemos las ecuaciones (3) y (5) y reemplacemos a por 2, pues ya sabemos que vale eso:

$$\begin{aligned}(a+b+c)+(a-b+c) &= -3+3\\ 2a+2c &= 0\\ 2\cdot 2+2c &= 0\\ 4+2c &= 0\\ 2c &= -4\\ c &= -2\end{aligned}$$

Ahora, el sistema nos queda así:

$$\begin{aligned}2+b-2 &= -3\\ 2+b+2 &= 1\\ 2-b-2 &= 3\end{aligned}$$

Despejando en cualquiera obtenemos que $b=-3$. Ahora que ya tenemos el valor de a, b y c, hallar x, y, z es inmediato:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= a\\ \frac{1}{x} &= 2\\ \frac{1}{x}\cdot x &= 2\cdot x\\ 1 &= 2\cdot x\\ 2x &= 1\\ 2x\cdot\frac{1}{2} &= 1\cdot\frac{1}{2}\\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

De manera similar, $y=-\frac{1}{3}$, $z=-\frac{1}{2}$. Finalmente,

$$x+y+z=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$$

$\square$

El ejemplo anterior podía hacerse sin considerar a, b, c, pero iba a ser mucho más confuso. En fin, es una excelente moraleja para finalizar nuestros ejemplos de ecuaciones:

Nosotros somos dueños de las letras y las podemos utilizar a nuestro gusto.

Ahora pasemos a un tema posiblemente más conocido y amigable.

Definición 3.1.1: Exponentes

Sea a un número real y n un entero no negativo. Entonces, definimos a^n como el producto de a multiplicado por sí mismo n veces. Es decir,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{veces}}$$

Definimos $a^0 = 1$.
Más aun, ¡podemos considerar exponentes racionales! Definamos $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Ahora, podemos definir para cualquier racional $\frac{m}{n}$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

También podemos considerar exponentes negativos. Definamos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Finalmente, también podemos considerar exponentes reales, pero esa ya es otra historia...

Teorema 3.1.2: Propiedades de los exponentes y los radicales

Para los números reales a y b distintos de 0, se dan las siguientes propiedades:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Y análogamente para los radicales

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Y bueno, eso fue como un resumen de todo lo que ya sabemos sobre los exponentes. Veamos estas propiedades en acción.

Ejemplo 3.1.6: Manual

Resuelva $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{4\cdot\sqrt{4^2}}}{2^3}}$

Solución.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\sqrt[4]{4\cdot\sqrt{4^2}}}{2^3}} &= \frac{\sqrt{\sqrt[4]{4\cdot\sqrt{4^2}}}}{\sqrt{2^3}}\\
&= \frac{\sqrt[8]{4}\cdot\sqrt[8]{\sqrt{4^2}}}{\sqrt{2^3}}\\
&= \frac{\sqrt[8]{4}\cdot\sqrt[16]{4^2}}{\sqrt{2^3}}\\
&= \frac{\sqrt[8]{4}\cdot\sqrt[8]{4}}{\sqrt{2^3}}\\
&= \frac{\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2^2}}{\sqrt{2^3}}\\
&= \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2^3}}\\
&= \frac{2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\\
&= 2^{-1}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

En el ejemplo anterior, otra opción era convertir desde el inicio todas las raíces a exponentes fraccionarios. A veces eso resulta más cómodo y ordenado. Háganlo como prefieran.

Ejemplo 3.1.7: Manual

Si a y b son reales positivos tales que $a^b = b^a$ y $b = 4a$, encuentre el valor de a.

Solución. Siempre que en un problema nos dan una condición extra como "tales que..." o "que cumplen...", tenemos que enfocarnos en utilizarla. Si nos la dan es porque la necesitaremos. Como $b = 4a$, podemos reemplazar b por $4a$ en la ecuación. Haciéndolo, obtenemos

$$\begin{aligned}
a^b &= b^a\\
a^{4a} &= (4a)^a\\
a^{4a} &= 4^a\cdot a^a
\end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados por a^a,

$$\begin{aligned} a^{4a} &= 4^a \cdot a^a \\ \frac{a^{4a}}{a^a} &= \frac{4^a \cdot a^a}{a^a} \\ a^{3a} &= 4^a \end{aligned}$$

Extrayendo la raíz $3a$-ésima de ambos lados,

$$\begin{aligned} a^{3a} &= 4^a \\ \sqrt[3a]{a^{3a}} &= \sqrt[3a]{4^a} \\ a &= \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = \sqrt[3]{4}$.

$\square$

Noten que en el ejemplo anterior no nos tuvimos que procupar por el asuntillo del doble signo como en el Ejemplo 3.1.3 al sacar la raíz $3a$-ésima, pues tanto a como 4 son reales positivos, por lo que, aun si hubiera respuesta negativa, no iba a servir. Por cierto, otra cosa. Puede que $3a$ no sea un entero, pero cuando digo raíz $3a$-ésima, es lo mismo que elevar a la $\frac{1}{3a}$.

Ejemplo 3.1.8: Manual

Sean m y n dos números tales que $(2^m)(4^n) = \sqrt{2}$ y $m + 3n = 2$. Halle mn.

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} (2^m)(4^n) &= \sqrt{2} \\ (2^m)((2^2)^n) &= 2^{\frac{1}{2}} \\ 2^m \cdot 2^{2n} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ 2^{m+2n} &= 2^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Entonces, $m + 2n = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, el problema se nos reduce a un sistema de ecuaciones:

$$m + 2n = \frac{1}{2} \tag{6}$$

$$m + 3n = 2 \tag{7}$$

De $(7) - (6)$,

$$\begin{aligned} m+2n &= \frac{1}{2} \\ (m+3n)-(m+2n) &= 2-\frac{1}{2} \\ n &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Despejando en cualquiera de las dos, obtenemos que $m = -\dfrac{5}{2}$.
por lo tanto, $mn = \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{4}$.

□

Veamos un concepto familiar.

Definición 3.1.2: El porcentaje

Definimos $x\,\%$ como $\dfrac{x}{100}$.

Como sé que les es un concepto muy familiar, pasaremos por él brevemente.

Ejemplo 3.1.9: Instagram

Demuestra que el $x\,\%$ de y es igual al $y\,\%$ de x.

Demostración. Es un problema muy sencillo y un dato interesante. Sin embargo, encierra el mejor consejo al trabajar con porcentajes: **No te compliques, solo conviértelo a fracción**.

$$x\,\% \quad \text{de} \quad y = \frac{x}{100}\cdot y = \frac{y}{100}\cdot x = y\,\% \quad \text{de} \quad x$$

□

Ejemplo 3.1.10: OPM Fase II 2015

A igual número de estudiantes de los grados 11 y 12 se les aplicó una encuenta. Se les preguntó lo siguiente: "¿Cree que existe vida en el planeta Kepler-425n?" Las alternativas de respuesta posibles eran SÍ o NO. Si 60 % de los que respondieron SÍ eran de grado 12 y 80 % de los que respondieron NO eran de 11, ¿qué porcentaje de los estudiantes de grado 11 contestaron que SÍ?

Demostración. Lo esencial es no enredarse, así que primero interpretemos los datos:

- Sea s la cantidad total de estudiantes que dijo SÍ y n la cantidad total de estudiantes que dijo NO.
- Como el 60 % de los que respondieron SÍ eran de grado 12, tenemos que $\dfrac{3}{5}s$ pertenecen al 12. Luego, los otros $\dfrac{2}{5}s$ pertenecen a 11.
- Como el 80 % de los que respondieron NO eran de grado 11, tenemos que $\dfrac{4}{5}n$ pertenecen al 11. Luego, los otros $\dfrac{1}{5}n$ pertenecen a 12.

- Por lo anterior, resulta que en 11 hay $\frac{2}{5}s+\frac{4}{5}n$ estudiantes, y en 12 hay $\frac{3}{5}s+\frac{1}{5}n$.
- Como participó la misma cantidad de estudiantes en cada grado, tenemos que $\frac{2}{5}s+\frac{4}{5}n=\frac{3}{5}s+\frac{1}{5}n$.

Lo crean o no, ya hicimos casi todo el trabajo.

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{5}s+\frac{4}{5}n &= \frac{3}{5}s+\frac{1}{5}n \\
\frac{4}{5}n-\frac{1}{5}n &= \frac{3}{5}s-\frac{2}{5}s \\
\frac{3}{5}n &= \frac{1}{5}s \\
n &= \frac{s}{3}
\end{aligned}
$$

Luego, en 11 hay en total

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{5}s+\frac{4}{5}n &= \frac{2}{5}s+\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{s}{3}\right) \\
&= \frac{2}{5}s+\frac{4}{15}s \\
&= \frac{2}{3}s
\end{aligned}
$$

estudiantes. Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{cantidad de estudiantes de 11 que dijeron SÍ}}{\text{cantidad de estudiantes de 11}} &= \frac{\frac{2}{5}s}{\frac{2}{3}s} \\
&= \frac{3}{5} \\
&= 60\,\%
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el 60 % de los estudiantes de 11 dijeron SÍ.

□

Veamos otro tema familiar.

Definición 3.1.3: Promedio

Definimos el *promedio* o *media aritmética* de n enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como la cantidad $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

Dicho intuitivamente, el promedio de ciertos números es como el número más cercano a todos ellos a la vez. Estoy seguro de que están familiarizados con cómo calcular promedios. Solo suman los números y lo dividen entre la cantidad de sumandos. Por ejemplo, el promedio de 100, 88, 98, 86 es

$$\frac{100+88+98+86}{4}=\frac{372}{4}=93$$

(¿Soy el único al que le ha pasado eso en Español?). Veamos un ejemplo más interesante.

Ejemplo 3.1.11: OPM Fase I 2014

El promedio de cuatro números es 48. Si se les resta 8 a cada uno de esos números, ¿cuál es el promedio de estos cuatro números nuevos?

Demostración. Llamémosle a los cuatro números a, b, c, d, Como su promedio es 48,

$$\frac{a+b+c+d}{4}=48$$

El problema nos pide hallar

$$\frac{(a-8)+(b-8)+(c-8)+(d-8)}{4}$$

Sin embargo, como ya sabemos que $\dfrac{a+b+c+d}{4}=48$, el resto solo es aritmética:

$$\begin{aligned}\frac{(a-8)+(b-8)+(c-8)+(d-8)}{4}&=\frac{a+b+c+d-32}{4}\\&=\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{32}{4}\\&=48-8\\&=40\end{aligned}$$

□

En los problemas anteriores, como vimos, no fue necesario hallar el valor de las letras; sin embargo, usarlas sí nos fue útil. Veamos ahora algunas cosas con respecto a las fracciones en Álgebra.

Teorema 3.1.3: Trucos con fracciones

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces

$$ad=bc \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Al primer truco se le conoce como *multiplicación en cruz o producto cruzado*, y se usa muy frecuentemente al trabajar con fracciones. El segundo truco no es tan conocido ni tan frecuente, pero puede llegar a ser poderoso.

Ejemplo 3.1.12: Baldor

El denominador de una fracción excede al numerador en 5. Si el denominador se aumenta en 7, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción.

Solución. Como el denominador excede en 5 al numerador, la fracción buscada es de la forma $\frac{x}{x+5}$. Ahora, si le aumentamos en 7 el denominador, nos da $\frac{1}{2}$, es decir,

$$\frac{x}{x+12} = \frac{1}{2}$$

Despejemos x utilizando la multiplicación en cruz:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+12} &= \frac{1}{2} \\ (2)(x) &= (1)(x+12) \\ 2x &= x+12 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fracción buscada es $\frac{12}{17}$.

□

Ejemplo 3.1.13: Sáb. de Octubre 2015

Sean x, y, z tres números reales positivos diferentes entre sí. Si

$$\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$$

¿Cuánto vale $\frac{x}{y}$?

Solución. Bueno, este no es un problema tan sencillo... En efecto, podrían llegar a hacer muchos cálculos y multiplicaciones en cruz sin llegar a nada. Sin embargo, nuestro elegante segundo truquito $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}\right)$ destruye el problema en una línea:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{(x)+(y)+(x+y)}{(y)+(x-z)+(z)} = \frac{2x+2y}{x+y} = \frac{2(x+y)}{(x+y)} = 2$$

□

Ahora pasemos a un tema posiblemente nuevo pero muy importante. En matemáticas, le llamamos *sucesión* a cualquier lista de números. En la matemática hay una infinidad de series, pero para olimpiadas nos enfocaremos en unas cuantas.

Definición 3.1.4: Progresión aritmética

A una sucesión de la forma

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$$

le llamamos *progresión aritmética.* Al número d le llamamos *diferencia.*

Veamos algunos ejemplos de progresiones aritméticas:

- (Los enteros) $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
- (Los impares) $\ldots, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$

- (Los pares) $\ldots, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$
- (Diferencia -5) $3, -2, -7, -12, \ldots$

Teorema 3.1.4: n-ésimo término y suma en una progresión aritmética

El n-ésimo término de una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de diferencia d está dado por

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

y la suma de sus primeros n términos (o sea, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$) está dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Vale la pena decir que, con base en lo anterior, si x, y, z son términos consecutivos en una progresión aritmética en ese orden, $y = \frac{x+z}{2}$, es decir, y es el promedio o media aritmética de x y z.

Ejemplo 3.1.14

Halle el 17° término de la progresión aritmética

$$2, 7, 12, 17, 22, \ldots$$

Solución. Por la fórmula,

$$\begin{aligned} a_{17} &= a_1 + (17-1)d \\ &= 2 + 16 \cdot 5 \\ &= 82 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.1.15: OPM Fase II 2007

Carlos y Juan viven en dos pueblos separados por 432 km. Un día, salen a encontrarse. Carlos viaja 1 km el primer día y cada día siguiente 2 km más que el anterior y Juan viaja 2 km el primer día y cada día siguiente 4 km más que el anterior. ¿Cuántos días transcurren hasta el encuentro?

Solución. Digamos que transcurren x días. Ahora, notemos que la cantidad de kilómetros que recorre Carlos cada día está en progresión aritmética de diferencia 2:

1 km, 3 km, 5 km, 7 km, ...

Luego, la cantidad de kilómetros que habrá avanzado en el día x será

$$a_x = a_1 + (x-1)d = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$$

Y la cantidad total de kilómetros avanzados será

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{(a_1 + a_x) \cdot x}{2} \\ &= \frac{(1 + 2x - 1) \cdot x}{2} \\ &= \frac{2x^2}{2} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

De manera similar, la cantidad de kilómetros que recorre Juan cada día está en progresión aritmética de diferencia 4:

2 km, 6 km, 10 km, 14 km, ...

Luego, la cantidad de kilómetros que habrá avanzado en el día x será

$$a'_x = a'_1 + (x-1)d' = 2 + 4(x-1) = 4x - 2$$

Y la cantidad total de kilómetros avanzados será

$$\begin{aligned} S'_x &= \frac{(a'_1 + a'_x) \cdot x}{2} \\ &= \frac{(2 + 4x - 2) \cdot x}{2} \\ &= \frac{4x^2}{2} \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

Finalmente, como se supone que al día x se encontraron, la suma de las cantidades totales que recorrieron debió abarcar los 432 km, es decir,

$$\begin{aligned} S_x + S'_x &= 432 \\ x^2 + 2x^2 &= 432 \\ 3x^2 &= 432 \\ x^2 &= 144 \\ x &= \pm 12 \end{aligned}$$

Sin emabrgo, descartamos el -12, porque la cantidad de días transcurridos debe ser positiva. Por lo tanto, transcurrieron 12 días.

□

Ahora, ¿qué pasa si $a_1 = d = 1$ en la fórmula de la suma de los primeros n elementos de la progresión? El resultado es el siguiente teorema, que se usa muy seguido.

Teorema 3.1.5: Fórmula de Gauss

Si n es un entero positivo,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ahora hablemos sobre otra progresión importante.

Definición 3.1.5: Progresión geométrica

A una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

le llamamos *progresión geométrica*. Al número r le llamamos *razón*.

Veamos algunas sucesiones geométricas:

- (Razón -1) $1, -1, 1, -1, \ldots$
- (Potencias de 2) $1, 2, 4, 8, \ldots$
- (Potencias de 10) $1, 10, 100, 1000, \ldots$
- (Razón $\frac{1}{2}$) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

Teorema 3.1.6: n-ésimo término y suma en una progresión geométrica

El n-ésimo término de una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de razón r está dado por

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

y la suma de sus primeros n términos (o sea, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$) está dada por

$$S_n = \frac{a_1(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

Vale la pena decir que, con base en lo anterior, si x, y, z son términos consecutivos en una progresión geométrica en ese orden, $y = \sqrt{xz}$. Entonces, decimos que y es la *media geométrica* de x y z.

Ejemplo 3.1.16: Manual

Halle el 12° de una progresión geométrica si el 2° y el 3° son 2 y $-\sqrt{2}$.

Solución. Lo que nos dice el enunciado es que $a_1 r = a_2 = 2$ y $a_1 r^2 = a_3 = -\sqrt{2}$. Luego, para hallar r, dividimos:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a_1 r^2}{a_1 r} \\ &= \frac{a_3}{a_2} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Ahora, hallar a a_1 es inmediato:

$$\begin{aligned} a_1 r &= 2 \\ a_1 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) &= 2 \\ a_1 &= -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ a_1 &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Finalmente, utilizamos la fórmula:

$$a_{12} = a_1 r^{12-1} = -2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^{11} = -2^{\frac{3}{2}} \cdot (-2^{-\frac{11}{2}}) = 2^{-4} = \frac{1}{16}.$$

□

También tenemos el caso especial en que $a_1 = 1$:

Teorema 3.1.7: Cuando $a_1 = 1$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Cuenta una leyenda que había una vez un rey muy triste. Un día, un sabio le presentó un juego que le alegró la vida: el ajedrez. Maravillado, el rey le ofreció al sabio la recompesa que quisiera. El sabio tímidamente le pidió lo siguiente: "Deme 1 grano de trigo por la primera casilla del tablero, 2 por la segunda, 4 por la tercera, 8 por la cuarta ..." Aquí el rey lo interrumpe, ofendido por lo que él consideraba una petición miserable, y le dice que le dará el trigo correspondiente por todas las 64 casillas. Aunque al rey le pareció poco... ¿en verdad lo era?

Ejemplo 3.1.17: La leyenda del ajedrez

Calcule

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63}$$

Solución. Usamos la fómula:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

□

Y bueno, eso son 18446744073709551615 granos de trigo. Al rey no le alcanzaría ni todo el trigo del mundo para cumplir aquella “humilde petición”.

Veamos una última sucesión que aparece de vez en vez. Definimos un *cuadrado perfecto* como cualquier entero cuya raíz cuadrada sea entera. Luego, la sucesión de los cuadrados perfectos positivos sería

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

Aquí el n-ésimo termino es, obviamente, n^2. Lo interesante es la suma de los n primeros términos:

Teorema 3.1.8: Suma de los primeros n cuadrados

Si n es un entero positivo,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejemplo 3.1.18

Halle la suma de los cuadrados perfectos menores que 300.

Solución. El mayor cuadrado perfecto menor a 300 es $289 = 17^2$. Luego, por la fórmula, el valor buscado es

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 17^2 = \frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} = 1785$$

□

3.2. Letras

Si bien ya introdujimos ideas algebráicas básicas, el álgebra es un poco más. Antes de leer esta sección, lo idea sería que supieras qué son monomios y fracciones algebraicas, cómo se suman, restan, multiplican y dividen y además cómo factorizar. (Si no lo saben, pueden averiguarlo en su libro de matemáticas, en internet o en Álgebra de Baldor). Empecemos como es usual, con productos notables y factorización:

Teorema 3.2.1: Productos notables/Factorizaciones

Si n es un entero positivo,

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, solo para n impar

Como ven, los productos notables simplemente son multiplicaciones particulares de polinomios. Por otro lado, mucho más útiles, las factorizaciones son lo inverso: maneras de *descomponer* o expresar polinomios como producto de otros.

Ejemplo 3.2.1: Manual

Si $ab = 3$ y $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 5$, halle el valor de $a^2 + b^2$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= 5 \\ \frac{b-a}{ab} &= 5 \\ b - a &= 5ab \end{aligned}$$

pero, como $ab = 3$,

$$b - a = 15$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned} (b-a)^2 &= b^2 - 2ab + a^2 \\ 15^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot 3 \\ 225 &= a^2 + b^2 - 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a^2 + b^2 = 225 + 6 = 231$. $\square$

Ejemplo 3.2.2: OPM Fase II 2018

a) Pruebe que 3999991 no es primo.
b) Pruebe que 1000343 no es primo.

Solución. La solución es realmente corta. La cosa es cómo llegar a ella. En primer lugar, si no lo recuerdan, un *número primo* es un entero que solo es divisible entre sí mismo y 1. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, ... Ahora la cosa es cómo verificar si un número tan grande como esos que vemos allí es primo o no. Y bueno, ¿qué tiene que ver esto con productos notables o factorización? Bien, resulta que si podemos expresar el número como producto de otros dos que no sean 1 y él mismo entonces no es primo, porque tendría a esos números de divisores. Les confieso que, cuando intenté este problema durante el examen, lo primero que estaba intentando era utilizar el Teorema 6.1.6. Sin embargo, eso me iba a tomar demasiado tiempo. Me detueve un rato a pensar, y entonces lo vi:

$$\begin{aligned}
3999991 &= 4000000 - 9 \\
&= 2000^2 - 3^2 \\
&= (2000-3)(2000+3) \\
&= 1997 \cdot 2003 \\
1000343 &= 1000000 + 343 \\
&= 100^3 + 7^3 \\
&= (100+7)(100^2 - 100 \cdot 7 + 7^2) \\
&= 107 \cdot (\text{lo que sea que dé lo de arriba})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ¡ya terminamos! 3999991 no es primo porque 1997 lo divide, y 1000343 no es primo porque 107 lo divide.

□

Espero que el ejemplo anterior los convenza de que la factorización es muy poderosa, incluso cuando no parece tener nada que ver. Ahora, pasemos a una ecuación extremadamente famosa, útil y recurrente.

Definición 3.2.1: La cuadrática

A una ecuación de la $ax^2 + bx + c = 0$ le llamamos *una cuadrática en x.*

Despejar x aquí no es tan sencillo como en los ejemplos que hemos visto hasta ahora. La manera de hacerlo es factorizando normalmente (aunque a veces es muy complicado) o por un método conocido como *completar el trinomio cuadrado perfecto*. La demostración es algo larga, pero, en resumen, hay una fórmula para facilitarnos la solución o las soluciones (también se les llama *raíces*):

Teorema 3.2.2: Fórmula general

Las soluciones (o solución) de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas (o está dada) por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 3.2.3: Baldor

La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados es 53. Hallar los números.

Solución. Si los números son x y y, el problema nos dice que

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x^2 + y^2 &= 53 \end{aligned}$$

Despejando y en la primera ecuación y reemplazándolo en la segunda,

$$\begin{aligned} x^2 + (9 - x)^2 &= 53 \\ x^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot x + x^2 &= 53 \\ 2x^2 - 18x + 81 &= 53 \\ 2x^2 - 18x + 28 &= 0 \\ x^2 - 9x + 14 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, procedemos, o bien factorizando, o bien utilizando la fórmula general. Usando la fórmula general, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{9 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Luego, $x = \frac{9+5}{2} = 7$ o $x = \frac{9-5}{2} = 2$. Si $x = 2$, reemplazando, obtenemos que $y = 7$. Si $x = 7$, reemplazando, obtenemos que $y = 2$. En ambos casos, los números son 2 y 7. □

Ejemplo 3.2.4: Manual

Encuentra las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 &= 2 \\ x - 3y^2 + z &= 0 \end{aligned}$$

Solución. Un sistema de ecuaciones algo peculiar... Improvisemos el método de eliminación. A la tercera ecuación restémosle la primera:

$$\begin{aligned} x - 3y^2 + z - (x + y + z) &= 0 - 2 \\ -3y^2 - y &= -2 \\ -3y^2 - y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Una cuadrática: perfecto. Podemos hallar los posibles valores de y factorizando o simplemente usamos la aterradora pero en el fondo amigable fórmula general:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-3)(2)}}{2 \cdot (-3)} \\ &= \frac{1 \pm 5}{-6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = \frac{1+5}{-6} = -1$ o $y = \frac{1-5}{-6} = \frac{2}{3}$. Sin embargo, como el problema nos pide las soluciones enteras, la única que funciona es $y = -1$. Reemplazando esto en la primera y segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ x^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

pero, basados en eso,

$$\begin{aligned} x^2 - z^2 &= 3 \\ (x+z)(x-z) &= 3 \\ (3)(x-z) &= 3 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

Entonces, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

del cual fácilmente obtenemos que $x = 2$ y $z = 1$. En conclusión, la única solución (x, y, z) entera del sistema es $(2, -1, 1)$, y no es difícil verificar que satisface las 3 ecuaciones del sistema.

$\square$

Ahora, enfoquémonos en una parte de la fórmula general que es digna de tener casi la misma atención que toda la fórmula.

Teorema 3.2.3: Discriminante

A la cantidad $b^2 - 4ac$ le llamamos el *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene 2 soluciones reales.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales.

Ejemplo 3.2.5: Manual

¿Para qué valores de k la ecuación $kx^2 + 2x + 1 - \dfrac{1}{k} = 0$ tiene una sola solución?

Solución. Si solo tiene una solución, su discriminante debe ser 0, es decir,

$$\begin{aligned} 2^2 - 4 \cdot (k) \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= 0 \\ 4 - 4k + 4 &= 0 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de k buscado es 2. □

Ahora, una aplicación menos obvia del discriminante:

Ejemplo 3.2.6: Instagram

¿Existen enteros positivos distintos a, b tales que $\dfrac{a^2 + b^2}{ab}$ es entero?

Solución 1. Asumamos que $\dfrac{a^2 + b^2}{ab} = n$, donde n es un entero. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{ab} &= n \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &= n \end{aligned}$$

Ahora, el truco: para tener menos incógnitas, digamos que $\dfrac{a}{b} = x$. Así, $\dfrac{b}{a}$ será simplemente $\dfrac{1}{x}$. Ahora, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &= n \\ x + \frac{1}{x} &= n \\ x \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) &= x \cdot n \\ x^2 + 1 &= nx \\ x^2 - nx + 1 &= 0 \end{aligned}$$

¡Una cuadrática! Luego, si buscamos x, obtenemos

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2}$$

Sin embargo, como $\frac{a}{b} = x$, x debe ser un número racional, por lo que la raíz cuadrada en la fórmula general debe ser exacta. Luego, el discriminante debe ser un cuadrado perfecto. Digamos que es c^2, con c positivo. Entonces,

$$\begin{aligned} n^2 - 4 &= c^2 \\ (n-c)(n+c) &= 4 \end{aligned}$$

Luego, $n-c$ y $n+c$ son dos enteros positivos cuyo producto es 4, por lo que las únicas opciones son

$$\begin{aligned} n - c &= 1 \\ n + c &= 4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} n - c &= 2 \\ n + c &= 2 \end{aligned}$$

El primer sistema de ecuaciones no tiene soluciones enteras. Luego, la única posibilidad es que ocurra el segundo, en el que $n = 2$ y $c = 0$. Si $n = 2$, reemplazando en la fórmula general, obtenemos que $x = 1$. Sin embargo, como $\frac{a}{b} = x$, esto quiere decir que $a = b$. Por lo tanto, la respuesta es que no. No existen enteros distintos a, b que cumplan eso. $\square$

Veamos la relación entre las soluciones de una cuadrática:

Teorema 3.2.4: Relaciones de Vieta

Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (si solo tiene una solución, tómenlo como $x_1 = x_2$), se cumple que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad x_1 x_2 = -\frac{c}{a}$$

Ejemplo 3.2.7: OPM Fase II 2007

Sean p, q, r números reales. La ecuación

$$x^2 - 3x + r$$

tiene dos raíces p y q. Sabiendo que $p^3 + q^3 = 81$, encuentre el valor de r.

Solución. Por Vieta, como p y q son raíces,

$$\begin{aligned} p + q &= 3 \\ pq &= r \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
p^3 + q^3 &= 81 \\
(p+q)(p^2 - pq + q^2) &= 81 \\
(p+q)(p^2 + 2pq + q^2 - 3pq) &= 81 \\
(p+q)((p+q)^2 - 3(pq)) &= 81 \\
3 \cdot (9 - 3r) &= 81 \\
9 - 3r &= 27 \\
-3r &= 18 \\
r &= -6
\end{aligned}$$

□

Ahora atendamos a las famosas desigualdades. Se comportan de una manera muy similar, pero más quisquillosa, a la ecuación.

Teorema 3.2.5: Propiedades de las desigualdades lineales

Si $x > y$, $z > w$ y c es un número real positivo,

- $x + c > y + c$
- $x - c > y - c$
- $cx > cy$
- $-cx < -cy$
- $x + z > y + w$
- $xz > yw$, solo si x, y, z, w son positivos

Las propiedades anteriores también funcionan si en vez de $<$ y $>$ usamos $\geq$ y $\leq$. Como ven, las desigualdades son enemigas de los exponentes. En realidad, solo pueden elevar o sacar raíz cuadrada (y debe ser la positiva) cuando sabes que ambos miembros de la desigualdad son positivos. Este lío se debe a que, en los positivos, 3 es mayor que 1, claro. Sin embargo, en los negativos, -3 es **menor que** -1. También recuerden cambiar el signo de la desigualdad al multiplicar o dividir por un negativo. Ojo con eso.

Ejemplo 3.2.8

Hallar los valores de x para los cuales

$$5 - 3x > 1$$

Solución.

$$\begin{aligned} 5-3x &> 1 \\ 5-3x-5 &> 1-5 \\ -3x &> -4 \\ \frac{-3x}{-3} &< \frac{-4}{-3} \\ x &< \frac{4}{3} \end{aligned}$$

por lo tanto, los valores de x que cumplen dicha desigualdad son todos los números reales menores a $\frac{4}{3}$ □

Ahora la desigualdad más famosa de todas. Irónicamente, dudo que lleguen a utilizarla en una olimpiada nacional. Sin embargo, uno nunca sabe, así que aquí está:

Teorema 3.2.6: MA-MG

Si a, b son reales no negativos,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

La demostración es sorprendentemente simple. Recuerden que cualquier número elevado al cuadrado es positivo o 0, por lo que

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0 \\ a-2\sqrt{ab}+b &\geq 0 \\ a-2\sqrt{ab}+b &\geq 0 \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Veamos una aplicación cotidiana.

Ejemplo 3.2.9: Entrenamiento de geometría con la Teacher Ema

Demostrar que el perímetro de un rectángulo al cuadrado es mayor o igual a 16 veces su área.

Solución. Recordemos que un rectángulo tiene dos pares de lados iguales. Digamos que miden x y y. Luego, su perímetro será $2x+2y$ y su área será xy. (Para más información consultar el Teorema 4.3.1). Luego, queremos demostrar que

$$\begin{aligned} (2x+2y)^2 &\geq 16xy \\ 4(x^2+2xy+y^2) &\geq 16xy \\ x^2+2xy+y^2 &\geq 4xy \\ x^2+y^2 &\geq 2xy \end{aligned}$$

Sin embargo, esto es equivalente a MA-MG. Solo reemplace x por $\sqrt{a}$. Por lo tanto, al ser equivalente a MA-MG, queda demostrado. $\square$

3.3. Funciones

Antes de definir una función, desarrollaremos temas sobre algunas funciones que ya conocen, aunque no sepan que lo son, para que vayan imaginándose por su cuenta qué es una función.

Hablemos sobre polinomios. Ya estudiamos los polinomios de primer grado, las ecuaciones lineales, y los de segundo grado, las cuadráticas. Veamos ahora a los polinomios de grado n:

Definición 3.3.1: Polinomios

Definimos como *polinomio de grado n* a cualquier expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números reales y $a_n \neq 0$. Si $P(r) = 0$ para algún número r, decimos que r es una *raíz* o un *cero* del polinomio P.

Por ejemplo, x^2, $x^3 - 3x^2 + 1$, $x - 9$ y 2 son polinomios en x de grado 2, 3, 1 y 0, respectivamente. Veamos algunas propiedades de los polinomios:

Teorema 3.3.1: Raíces

Un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces reales.

Teorema 3.3.2: Teorema del Residuo

Si dividimos $P(x)$ entre $x - a$, el residuo de la división será $P(a)$.

Teorema 3.3.3: Teorema del Factor

el número r es una raíz de $P(x)$ si y solo si $x - r$ es un factor del polinomio.

Teorema 3.3.4: Factorización de un polinomio

Si las raíces de un polinomio P de grado n son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

donde c es un número real distinto de 0.

Este último teorema es la factorización de un polinomio. A aquellos que hayan visto división sintética se les hará familiar.

Observación 3.3.1

De hecho, aunque es un resultado muy fuerte, un polinomio de grado n siempre tiene n raíces. Sin embargo, puede que estas raíces sean repetidas o que no sean reales (que involucren a $\sqrt{-1}$).

Ejemplo 3.3.1: OPM Fase II 2018 (fragmento)

¿Cuántas raíces distintas y reales tiene el polinomio $2018x^3 + 2017x^2 + 2016x$?

Solución. Como es un polinomio cúbico (de grado 3), sabemos que tiene 3 raíces. Ahora tenemos que ver cuáles son.

$$2018x^3 + 2017x^2 + 2016x = x \cdot (2018x^2 + 2017x + 2016)$$

Luego, por el factor $x = x - 0$, deducimos que 0 es una de esas raíces. También sabemos que, si las otras raíces son r y s, debe ocurrir que

$$x \cdot (x - r)(x - s) = 2018x^3 + 2017x^2 + 2016x = x \cdot (2018x^2 + 2017x + 2016)$$

Luego,

$$(x - r)(x - s) = 2018x^2 + 2017x + 2016$$

Sin embargo, el discriminante de $2018x^2 + 2017x + 2016$ es

$$2017^2 - 4 \cdot 2018 \cdot 2016 < 0$$

Por lo tanto, resulta que r y s no son raíces reales. Finalmente, esto quiere decir que la única raíz real de $2018x^3 + 2017x^2 + 2016x$ es 0, es decir, solo tiene una raíz real. □

Ejemplo 3.3.2: Manual

Encuentra el residuo que resulta cuando

$$P(x) = (x + 3)^5 + (x + 2)^8 + (5x + 9)^{2012}$$

se divide entre $x + 2$.

Solución. Como $(x + 2) = (x - (-2))$, por el Teorema del Residuo, el residuo es

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2 + 3)^5 + (-2 + 2)^8 + (5 \cdot (-2) + 9)^{2012} \\ &= 1^5 + 0^8 + (-1)^{2012} \\ &= 1 + 0 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

□

Ahora veamos otro temilla que quizá ya hayan visto. Si no, igual quédense: es un tema adorable. ¿Han pensado en cómo resolver ecuaciones como $4^x = 3$ o $4^x + 6^x = 9^x$? ¡Pues les presento a los logartimos y a sus maravillas!

Definición 3.3.2: Logaritmos

Si $a = b^x$, a x le llamamos *logaritmo con base b de a*, y lo escribimos como

$$\log_b a = x$$

Los logaritmos nos sirven para despejar exponentes. Además, el logaritmo de cualquier número en cualquier base es un número fijo. Por ejemplo, $\log_{10} 7 = 0.845...$. Sin embargo, algo así como las raíces, no siempre nos darán valores bonitos. Aun así, muchas veces nos ayudan más las propiedades del logaritmo que su valor. Un logaritmo extremadamente común es $\log_{10}$, al que muchas veces escribimos solo como log. Como despejan exponentes, las propiedades de los logaritmos son muy similares a las de estos:

Teorema 3.3.5: Propiedades de los logaritmos

Si b, c, x, y son reales positivos con $b, c \neq 1$ y r es cualquier real, entonces

- $b^{\log_b x} = x$
- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b \frac{1}{b} = -1$
- $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b x^r = r \log_b x$
- (Cambio de base) $\log_b x = \dfrac{\log_c x}{\log_c b}$

Ejemplo 3.3.3: Manual

Si $\log_4 125 = c$, halle el valor de $\frac{2}{3}c$.

Solución. Por las propiedades de los logaritmos,

$$\begin{aligned} \log_4 125 &= c \\ \log_4 5^3 &= c \\ 3 \log_4 5 &= c \\ \log_4 5 &= \frac{c}{3} \end{aligned}$$

Ahora, por la definición de logaritmo,

$$\begin{aligned} 4^{\frac{c}{3}} &= 5 \\ (2^2)^{\frac{c}{3}} &= 5 \\ (2)^{\frac{2}{3}c} &= 5 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando logaritmo con base 2 de ambos lados, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(2)^{\frac{2}{3}c} &= 5 \\
\log_2 (2)^{\frac{2}{3}c} &= \log_2 5 \\
\frac{2}{3}c &= \log_2 5
\end{aligned}
$$

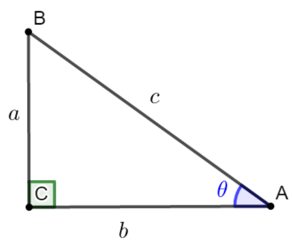
□

Unas últimas funciones más, que estoy seguro de que son muy queridas por todos los que están de 10° en adelante:

Definición 3.3.3: Funciones trigonométricas

Sea ABC un triángulo con ángulo recto en C y sean a, b, c sus lados, con a opuesto a A, b opuesto a B y c opuesto a C. Sea $\theta = \angle BAC$. Definimos

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c}$
- $\cos\theta = \frac{b}{c}$
- $\tan\theta = \frac{a}{b}$
- $\csc\theta = \frac{c}{a}$
- $\sec\theta = \frac{c}{b}$
- $\cot\theta = \frac{b}{a}$



La trigonometría yace en medio de algún romance entre el álgebra y la geometría. En esta sección, veremos su lado algebraico. Para ello, ¡repasemos las queridísimas identidades trigonométricas!

Teorema 3.3.6: Identidades trigonométricas

Sean α, β, θ ángulos/números reales para los cuales las respectivas funciones estén definidas. Entonces, se cumplen las siguientes identidades:

Recíprocas

- $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
- $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
- $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Pitagóricas

- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\tan^2\theta + 1 = \sec^2$
- $\cot^2\theta + 1 = \csc^2$

Suma y resta

- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

Doble ángulo

- $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

Y sí, el exponente en las funciones trigonométricas se le puede poner solo a la función. Es decir, $(\operatorname{sen}x)^2 = \operatorname{sen}^2 x$. Ahora, aunque hemos definido las funciones trigonométricas en base a ángulos, recuerden que los ángulos también pueden expresarse en radianes. Aquí viene lo bueno: como los radianes son números reales, las funciones trigonométricas pueden generalizarse para todos los reales en lugar de solo los ángulos. Cabe destacar lo siguiente:

Teorema 3.3.7: Dominio y codominio de las funciones trigonométricas

Si x es un número real,

- $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ **siempre** son valores entre -1 y 1, inclusives. Estśn definidas para todo x.
- $\csc x$ y $\sec x$ **nunca** son valores entre -1 y 1, aunque pueden llegar a ser exactamente -1 y 1.
- $\csc x$ no está definida para $x = \pi k$ para ningún entero k, y $\sec x$ no está definida para $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ para ningún entero k.
- $\tan x$ y $\cot x$ pueden tomar cualquier valor real.
- $\tan x$ no está definida para $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ para ningún entero k, y $\cot x$ no está definida para $x = \pi k$ para ningún entero k.

Ejemplo 3.3.4: Manual

Sea a un número real. Si $\cos x = a \operatorname{sen} x$, halle el valor de

$$(\csc x - a)(\csc x + a)$$

Solución 1. Por la condición del problema,

$$\begin{aligned}
\cot x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\
\cot x &= a
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que la identidad $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ es equivalente a $1 = \csc^2 x - \cot^2 x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\csc x - a)(\csc x + a)x &= \csc^2 x - a^2 \\
&= \csc^2 x - \cot^2 x \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Solución 2. Notemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\operatorname{sen}^2 x + a^2 \operatorname{sen}^2 x &= 1 \\
(1 + a^2) \operatorname{sen}^2 x &= 1 \\
\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} &= a^2 + 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\csc x - a)(\csc x + a)x &= \csc^2 x - a^2\\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - a^2\\ &= (a^2+1) - a^2\\ &= 1\end{aligned}$$

□

Ha llegado la hora de definir uno de los conceptos más importantes de toda la matemática:

Definición 3.3.4: Funciones

Una función $f : A \to B$ es una regla de correspondencia entre dos conjuntos A y B de tal manera que a cada elemento del conjunto A, llamado *dominio*, se le asigna exactamente un elemento del conjunto B, llamado *codominio*.

Si aún no entienden bien qué es una función, les daré la definición intuitiva que me dio un buen amigo cuando yo aún no entendía qué era una función: **"Una función es como una fábrica: para cada x que metas en f, la función te producirá un valor $f(x)$".**

Definición 3.3.5: Algunas funciones

Veamos algunas funciones importantes:

- Los polinomios, que ya vimos. Su dominio y codominio son $\mathbb{R}$, pues si evaluamos $P(x)$ para cualquier x real, nos dará un número real.
- Los logaritmos, cuyo dominio son los reales positivos, y su codominio, $\mathbb{R}$.
- Las funciones trigonométricas, cuyos dominios y codominios describimos con detalle en 3.3.7.
- La función *valor absoluto* de x, que escribimos como $|x|$. Esta función lo que hace es quitarle el signo negativo a todo, si es que lo tiene. Qué amable, ¿no? Por ejemplo, $|22| = 22$, $\left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$ y $|0| = 0$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su codominio los reales no negativos.
- La función *parte entera* o *piso* de x, que escribimos como $\lfloor x \rfloor$. Esta función lo que hace es darnos el mayor entero que no se pase de x. Por ejemplo, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor -\pi \rfloor = 4$ (¡no -3, porque -3 es mayor que $-\pi$, o sea, se pasa!), $\lfloor 4 \rfloor = 4$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su codominio es $\mathbb{Z}$.
- La función *parte fraccionaria*, que escribimos como $\{x\}$ y que simplemente definimos como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Por ejemplo, $\{1\}$=0, $\{\frac{7}{4}\} = \frac{3}{4}$ y $\{-3.1\} = 0.9$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su codominio son los números reales entre 0, inclusive, y 1 (1 no está incluido).
- La función *techo*, que escribimos $\lceil x \rceil$ y simplemente es una copia barata de la función piso: en lugar de tomar el mayor entero que no sea mayor a x, toma el menor entero que no sea menor que x. Por ejemplo, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil -\pi \rceil = -3$ y $\lceil 4 \rceil = 4$.

Ejemplo 3.3.5: Manual

Si $x = (\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\ldots(\log_{2006} 2007)$, halle $\lfloor x \rfloor$.

Solución. Utilizando la fórmula de cambio de base de los logaritmos, si c es cualquier real positivo,

$$\begin{aligned} x &= (\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\ldots(\log_{2006} 2007) \\ &= \frac{\log_c 3}{\log_c 2} \cdot \frac{\log_c 4}{\log_c 3} \cdot \frac{\log_c 5}{\log_c 4} \cdots \frac{\log_c 2007}{\log_c 2006} \\ &= \frac{\log_c 2007}{\log_c 2} \\ &= \log_2 2007 \end{aligned}$$

Luego,

$$2^x = 2007$$

Ahora, como $2^{10} = 1024$ y $2^{11} = 2048$ y $1024 < 2007 < 2048$, x debe ser algún número entre 10 y 11. Por lo tanto, $\lfloor x \rfloor = 10$. $\square$

Ejemplo 3.3.6: Manual

Una función f es tal que para todo número x,

$$f(x) + f(x-1) = x^2$$

Si $f(92) = 94$, encuentra $f(94)$.

Solución. Notemos que la condición del problema es equivalente a

$$f(x) = x^2 - f(x-1)$$

Usando esto y recordando que $f(92) = 94$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(94) &= 94^2 - f(93) \\ &= 94^2 - (93^2 - f(92)) \\ &= 94^2 - 93^2 + 94 \\ &= (94+93)(94-93) + 94 \\ &= 187 + 94 \\ &= 281 \end{aligned}$$

□

3.4. Problemas

Problema 3.4.1 (OPM Fase I 2011). Ana compró una bolsa de mandarinas y regaló la mitad a Carla. Luego, le dio tres mandarinas a Luisa y se quedó con cuatro mandarinas. ¿Cuál es el número de mandarinas que había en la bolsa?

Problema 3.4.2 (OPM Fase I 2011). En este cuadrado mágico la suma de los tres números en cada fila, columna y diagonal resulta la misma cantidad.

		x
$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	
		$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Halle el valor de x.

Problema 3.4.3 (OPM Fase II 2018 (fragmento)). Sara compró dulces para su cumpleaños. Al colegio llevó $\frac{1}{3}$ de la cantidad total de dulces y en la fiesta de su casa se consumieron $\frac{2}{5}$ de los restantes. Sara envió 6 a su abuelita y aún sobraron dulces. ¿Cuál es la mínima cantidad de dulces que Sara compró?

Problema 3.4.4 (Sáb. de Octubre 2015). Ana leyó un libro. El primer día leyó 5 páginas y cada día siguiente leyó 2 páginas más que el anterior (estaba interesante). Si terminó el libro en 20 días, ¿cuántas páginas tenía el libro?

Problema 3.4.5 Hallar todos los pares de números naturales (x, y) con $x < y$ tales que la suma de todos los números naturales comprendidos entre ellos es igual a 2011.

Problema 3.4.6 (Canguro 2018). Las raíces de la ecuación $x^2 - x - 2018$ son m y n. Halle el valor de $n^2 + m$.

Problema 3.4.7 (Manual). Si $\log xy^3 = 1$ y $\log x^2y = 1$, ¿cuál es el valor de $\log xy$?

Problema 3.4.8 (Manual). Si $\cos 2x = \frac{4}{7}$, halle el valor de $|\operatorname{sen}^2 x - 2| - |\cos^2 x - 2|$.

Problema 3.4.9 (OPM Fase II 2008). Halle todos los números reales x tales que $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ y x son términos consecutivos de una progresión geométrica.

Problema 6.3.10 (OPM Fase II 2014). Considere la ecuación

$$(x^2 + 10x + a)^2 = b$$

a) Si $a = 21$, encuentre b tal que existan exactamente tres valores de x que satisfacen la ecuación.
b) Si $a \geq 25$, muestre que no existe b para el cual la ecuación tiene exactamente tres soluciones reales.

4. Geometría

Además de estudiar solo los números, la matemática también estudia las figuras. Al estudio de las propiedades de las figuras le llamamos *geometría*, y, en verdad, los números y las figuras están más relacionados de lo que parece. Iniciemos con unas nociones básicas.

4.1. Nociones básicas

Definición 4.1.1: El punto

Es una figura que carece de dimensiones. Generalmente la representamos por un círculo muy pequeño, como el *punto* al final de esta oración.

A los puntos generalmente se les nombra con letras mayúsculas.

Definición 4.1.2: Figura geométrica

Cualquier conjunto de puntos de dos dimensiones.

Definición 4.1.3: Segmento

Es el conjunto de puntos que conforman la ruta más corta entre dos puntos dados.

A los segmentos se les llama por cuánto miden, por letras minúsculas o simplemente por sus dos puntos extremos.

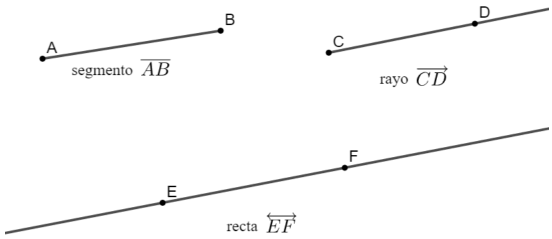
Definición 4.1.4: Rayo o semirrecta

Es un segmento prolongado infinitamente desde un extremo.

Definición 4.1.5: Recta

Es un segmento prolongado infinitamente desde ambos extremos.

A las rectas generalmente se les llama por dos de sus puntos o por letras minúsculas.



Definición 4.1.6: Plano

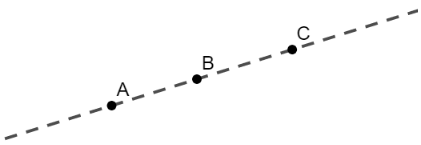
Es un objeto que solo posee dos dimensiones y se expande indefinidamente. Para imaginárselo, es como si tuviéramos una hoja de papel infinita. Todas las figuras geométricas están sobre un plano.

Definición 4.1.7: Espacio

Las tres dimensiones que conocemos. Los *cuerpos geométricos* (a diferencia de las figuras, los cuerpos tienen tres dimensiones) como los cubos se encuentran contenidos en el espacio.

Definición 4.1.8: Colinealidad

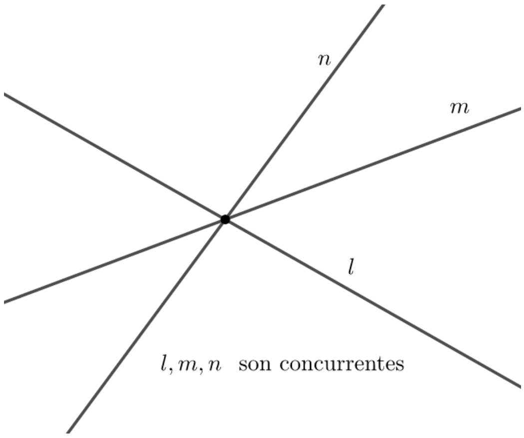
Si 3 puntos están sobre una misma recta, se dice que son *colineales*.



A, B, C son colineales

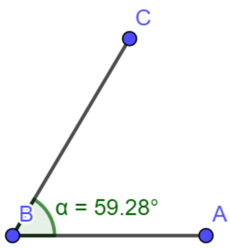
Definición 4.1.9: Concurrencia

Si 3 rectas pasan por el mismo punto, se dice que son *concurrentes*.

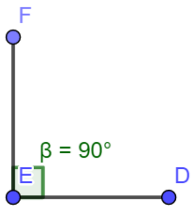


Definición 4.1.10: Ángulo

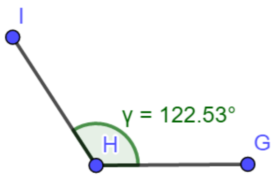
Le llamamos *ángulo* a la región del plano entre dos rayos. Para nombrar un ángulo, utilizamos 3 puntos: dos que estén sobre sus dos rayos (a los que llamamos *lados*) y el punto de intersección de los dos rayos, al que llamamos *vértice*. Por ejemplo, si el ángulo está entre los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, lo llamamos $\angle AOB$. El vértice siempre debe ir en medio en la notación. También podemos llamarlos utilizando letras del alfabeto griego. Hay diversas maneras de medir un ángulo, pero nosotros lo mediremos con grados sexagimales (°). También podemos llamar a un ángulo por su medida. Dependiendo de "cuán amplio" sea el ángulo, puede medir de 0° a 360°. Los ángulos que miden entre 0° y 90° se denominan *agudos*, los ángulos de 90° se denominan *rectos*, los ángulos que miden entre 90° y 180° se denominan *obtusos* y los ángulos de 180° se denominan *llanos*.



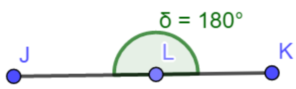
ángulo agudo $\angle ABC = \alpha$



ángulo recto $\angle DEF = \beta$



ángulo obtuso $\angle GHI = \gamma$

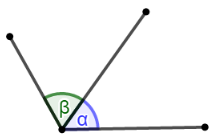


ángulo llano $\angle KLJ = \delta$

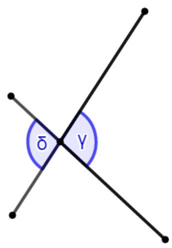
Definición 4.1.11: Algunos pares de ángulos

Nombremos algunos pares específicos de ángulos:

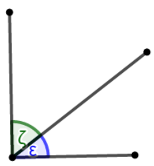
- Si dos ángulos comparten un lado y tienen el mismo vértice, decimos que son *adyacentes*
- A dos ángulos cuyos lados sean semirrectas opuestas a las del otro y compartan vértice les llamamos *opuestos por el vértice.*
- Si dos ángulos adyacentes suman 90°, decimos que son *complementarios*
- Si dos ángulos adyacentes suman 180°, decimos que son *suplementarios*



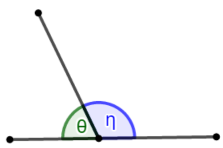
α y β son adyacentes



δ y γ son opuestos por el vértice



ζ y ϵ son complementarios

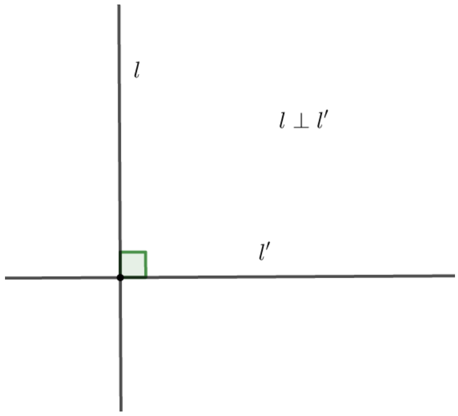


θ y η son suplementarios

Aunque pueda parecer obvio, igual tengan en mente que **la suma de los ángulos adyacentes es igual al ángulo que forman los dos juntos** y que **los ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí**.

Definición 4.1.12: Perpendicular

Decimos que dos rectas l y l' son *perpendiculares*, y lo escribimos como $l \perp l'$, si los ángulos que forman al cortarse son de 90°.



Definición 4.1.13: Paralelas

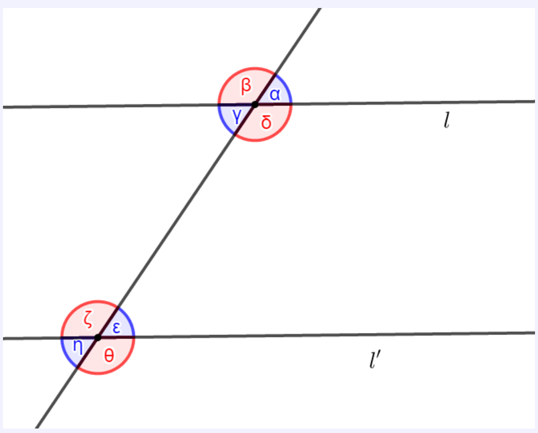
A dos rectas l y l' que no se intersectan, por más que se prolonguen, les llamamos *paralelas*, y lo escribimos $l \parallel l'$

Ahora, veamos nuestro primer teorema de geometría:

Teorema 4.1.1: Ángulos entre paralelas

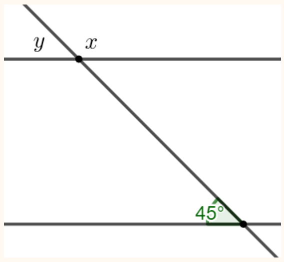
En la figura, si $l \parallel l'$ y una recta las corta, tenemos lo siguiente:

- $\alpha = \gamma = \epsilon = \eta$
- $\beta = \delta = \zeta = \theta$
- A parejas de ángulos como γ y ϵ se les conoce como *alternos internos*, y son iguales.
- A parejas de ángulos como α y ϵ se les conoce como *correspondientes*, y son iguales.
- A parejas de ángulos como β y θ se les conoce como *alternos externos*, y son iguales.



Ejemplo 4.1.1

Halle el valor de x en la siguiente figura:



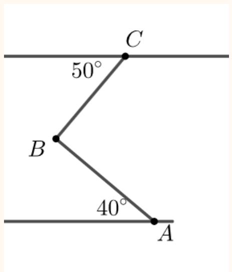
Solución. Como y es correspondiente con $45°$, $y = 45°$. Finalmente, como x y y son suplementarios, $x + y = 180°$, por lo que

$$x = 180° - y = 180° - 45° = 135°$$

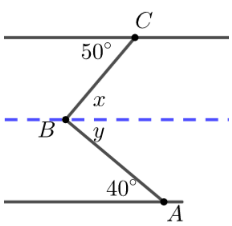
□

Ejemplo 4.1.2

En la siguiente figura, pruebe que $AB \perp BC$.



Solución. A simple vista, no vemos modo de aplicar lo que conocemos sobre paralelas... Sin embargo, hay algo hermoso de la geometría: ¡podemos construir! Tracemos una recta paralela a ambas que pase por B y nombremos a los ángulos x y y:



Ahora, es fácil notar que, por alternos internos, $x = 50°$ y $y = 40°$. Por lo tanto,

$$\angle ABC = x + y = 50° + 40° = 90°,$$

es decir, $AB \perp BC$. □

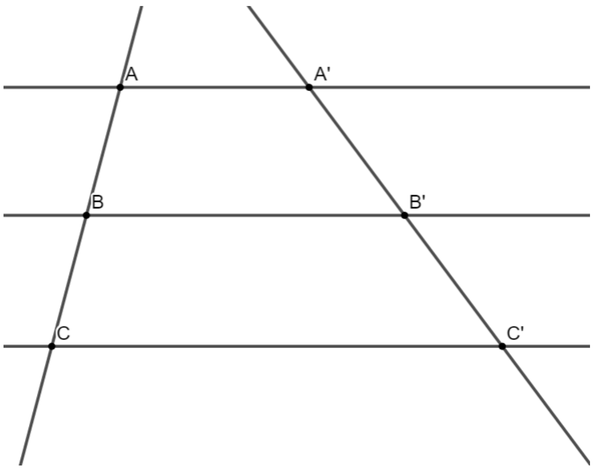
En el ejemplo anterior vimos que una construcción nos hizo posible resolver el problema. En efecto, acostúmbrense a eso: prolonguen segmentos hasta que se intersecten con otros, construyan paralelas, nombren puntos, etc. Los problemas más difíciles generalmente están ocultos tras una construcción que, al hacerla, lo vuelve fácil.

Ya vimos qué pasa con los ángulos y las paralelas. Ahora, en lugar de ángulos, enfoquémonos en distancias:

Teorema 4.1.2: Teorema de Thales

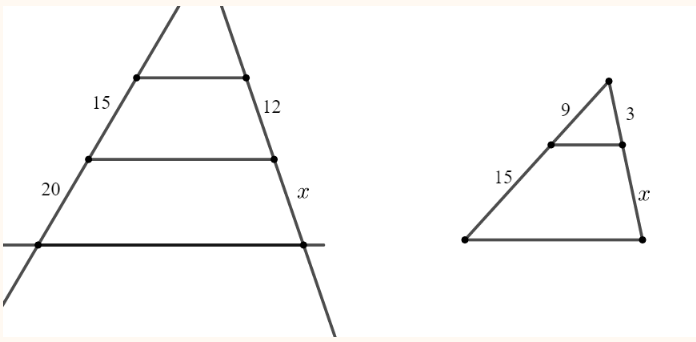
Sean AA', BB', CC' tres rectas tales que $A-B-C$ son colineales y $A'-B'-C'$ son colineales. Entonces, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ si y solo si

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$



Ejemplo 4.1.3

Halle el valor de x en las siguientes figuras:



Solución. En la primera, por el Teorema de Thales,

$$\frac{x}{12} = \frac{20}{15}$$
$$x = 12 \cdot \frac{4}{3}$$
$$x = 16$$

Análogamente, en la segunda, por Thales,

$$\frac{x}{3} = \frac{15}{9}$$
$$x = 3 \cdot \frac{5}{3}$$
$$x = 5$$

□

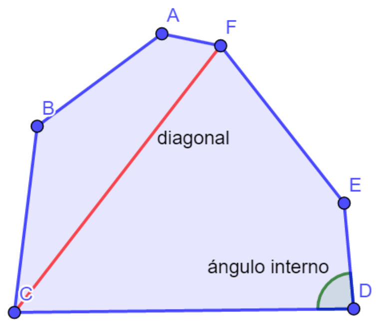
Finalmente, definamos a los polígonos... ¡que veremos en el 99 % de los problemas de geometría!

Definición 4.1.14: Polígono

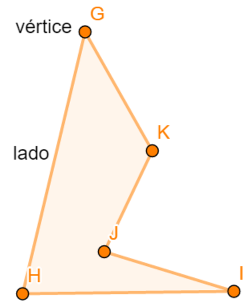
- Llamamos *polígono* a una región finita en el plano limitada por una cantidad finita de segmentos. Estos segmentos son llamados *lados* y los puntos en que se intersectan se llaman *vértices.*
- Un polígono siempre tendrá la misma cantidad de lados y de vértices.
- Al segmento que une dos vértices no consecutivos le llamamos *diagonal.*
- A los ángulos dentro del polígono entre dos lados consecutivos le llamamos *ángulos internos.*
- A todos los lados de un polígono y a la suma de sus longitudes le llamamos *perímetro.*
- A la medida de la región interna del polígono le llamamos *área.*
- Decimos que un polígono está *inscrito* en otro cuando todos sus vértices están sobre el perímetro del otro.
- Decimos que un polígono está *circunscrito* en otro si su perímetro contiene todos los vértices del otro.

A los polígonos los nombramos por sus vértices, que generalmente están escritos en orden antihorario (contrario a las manecillas del reloj). Los polígonos más frecuentes son los siguientes:

- Al polígono de tres lados se le conoce como *triángulo*
- Al de cuatro lados, *cuadrilátero*
- Al de cinco lados, *pentágono*
- Al de seis lados, *hexágono*



polígono convexo $ABCDEF$



polígono cóncavo $GHIJK$

- Al de siete lados, *heptágono*
- Al de ocho lados, *octágono*
- Al de nueve lados, *nonágono*
- Al de diez lados, *decágono*

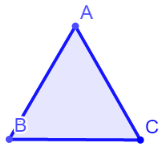
4.2. Triángulo: parte 1

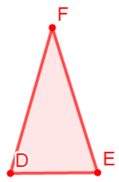
En la sección anterior vimos qué es un polígono, pero hay un polígono muy especial, recurrente en los problemas y por el que vale la pena comenzar:

Definición 4.2.1: Triángulo

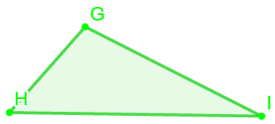
Un *triángulo* es un polígono de 3 lados (y por ende 3 vértices y 3 ángulos).

- Si un triángulo tiene 2 de sus lados iguales, se le llama *isósceles*.
- Si un triángulo tiene sus 3 lados iguales, se le llama *equilátero*.
- Si un triángulo tiene sus 3 lados distintos, se le llama *escaleno*.
- Si un triángulo tiene un ángulo recto, se le llama *rectángulo*.
- Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, se le llama *obtusángulo*.
- Si un triángulo tiene sus tres ángulos agudos, se le llama *acutángulo*.





$\triangle ABC$ es equilatero $\triangle DEF$ es isósceles y acutángulo



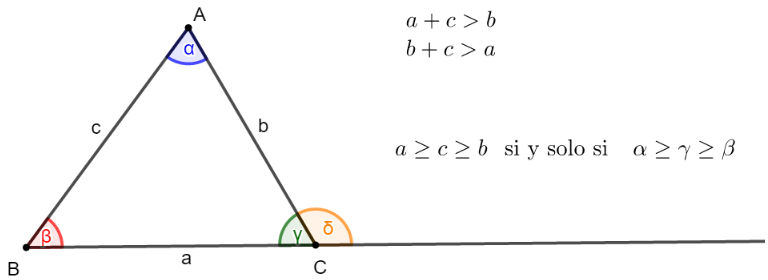
$\triangle GHI$ es escaleno y obtusángulo

A un triángulo lo nombramos por sus tres vértices. Antes de empezar a ver problemas de geometría, es vital que conozcan las propiedades de los triángulos.

Teorema 4.2.1: Propiedades de los triángulos

Sea ABC un triángulo. Entonces,

- La suma de sus ángulos interiores es igual a $180°$.
- (Ángulo externo). La suma de los ángulos internos de 2 de sus vértices es igual al ángulo externo en el vértice restante.
- El orden de los lados de menor a mayor es igual al orden de sus ángulos opuestos de menor a mayor.
- (Desigualdad del triángulo). La suma de la longitud de 2 de sus lados es mayor a la longitud del lado restante.



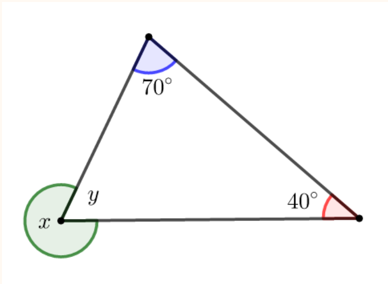
Desigualdad del triángulo
$a + b > c$
$a + c > b$
$b + c > a$

$a \geq c \geq b$ si y solo si $\alpha \geq \gamma \geq \beta$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ $\alpha + \beta = \delta$

Ejemplo 4.2.1

¿Cuánto vale x?



Solución. Como la suma de los ángulos internos es 180°,

$$\begin{aligned} y + 40^\circ + 70^\circ &= 180^\circ \\ y + 110^\circ &= 180^\circ \\ y &= 70^\circ \end{aligned}$$

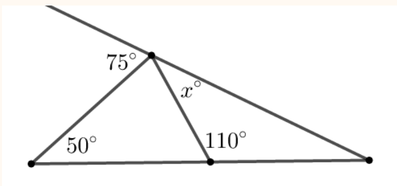
Finalmente, como x y y forman un *giro completo* o un ángulo de 360°,

$$\begin{aligned} x + y &= 360^\circ \\ x + 70^\circ &= 360^\circ \\ x &= 290^\circ \end{aligned}$$

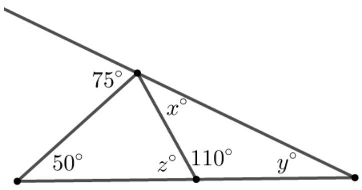
□

Ejemplo 4.2.2: OPM Fase I 2014

Halle el valor de x en la figura:



Solución. Démosle nombre a los ángulos que nos faltan:



Ahora, por ángulo externo,

$$50^\circ + y^\circ = 75^\circ,$$

por lo que $y^\circ = 25^\circ$. Ahora, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°,

$$\begin{aligned} 110^\circ + y^\circ + x^\circ &= 180^\circ \\ 110^\circ + 25^\circ + x^\circ &= 180^\circ \\ 135^\circ + x^\circ &= 180^\circ \\ x^\circ &= 45^\circ \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 45$. □

Siempre denle nombre a los ángulos o segmentos cuyo valor les interesa hallar o que simplemente les puedan llegar a ser útiles.

Ejemplo 4.2.3: OPM Fase I 2014

De las siguientes alternativas, ¿cuál no representa las longitudes de un triángulo?

a) 3, 4, 5

b) 5, 12, 13

c) 16, 17, 40

d) 18, 15, 20

e) 10, 10, 17

Solución. La respuesta es la c), ya que, como

$$16 + 17 < 40$$

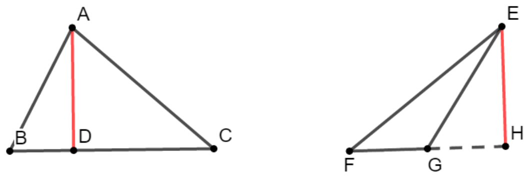
estos números no cumplen con la Desigualdad del triángulo. Por lo tanto, no pueden ser los lados de un triángulo. □

Definición 4.2.2: Punto medio

El *punto medio* de un segmento es el que lo divide en dos segmentos iguales. Si ABC es un triángulo y M y N son los puntos medios de AB y AC, respectivamente, decimos que MN es *base media* del triángulo.

Definición 4.2.3: Altura

Sea ABC un triángulo. Digamos que la perpendicular a BC por A porta a BC en D. Entonces, al segmento AD le llamamos *altura* de $\triangle ABC$.

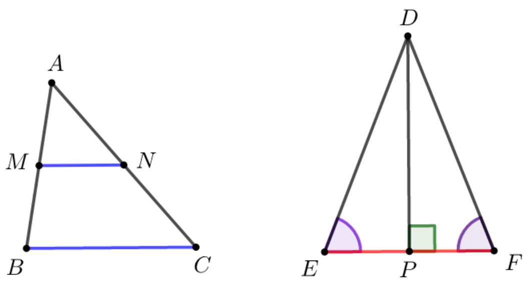


Alturas de $\triangle ABC$ y $\triangle EFG$

Teorema 4.2.2: Otras propiedades del triángulo

Tenemos lo siguiente:

- En todo triángulo, la base media es paralela al lado correspondiente y mide la mitad de este.
- Si el triángulo es isósceles, los ángulos correspondientes a los lados iguales son iguales también y su altura pasa por el punto medio de su base.
- Los tres ángulos de un triángulo equilátero miden 60°.



$MN \parallel BC$

$MN = \dfrac{BC}{2}$

$DE = DF$

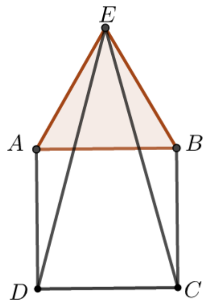
$\angle FED = \angle DFE$

$DP \perp EF$

$EP = PF$

Ejemplo 4.2.4: OPM Fase I 2013

Considere un cuadrado $ABCD$ y un punto E fuera del cuadrado tal que ABE es un triángulo equilátero. Halle la medida del ángulo DEC.



Solución. Lo primero es notar que, como en un cuadrado todos sus lados son iguales, al igual que en un triángulo equilátero, $DA = AE$, por lo que $\triangle ADE$ es isósceles. Ahora, como los lados del cuadrado son perpendiculares y los ángulos en un triángulo equilátero son $60°$,

$$\begin{aligned} \angle DAE &= \angle DAB + \angle BAE \\ &= 90° + 60° \\ &= 150° \end{aligned}$$

Ahora, como $\triangle ADE$ es isósceles, sus ángulos de la base serán iguales. Digamos que valen x. Entonces,

$$\begin{aligned} x + x + 150° &= 180° \\ 2x &= 30° \\ x &= 15° \\ \angle AED &= 15° \end{aligned}$$

Usando la misma lógica, $\angle CEB = 15°$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \angle AED &= \angle AEB - \angle AED - \angle CEB \\ &= 60° - 15° - 15° \\ &= 30° \end{aligned}$$

□

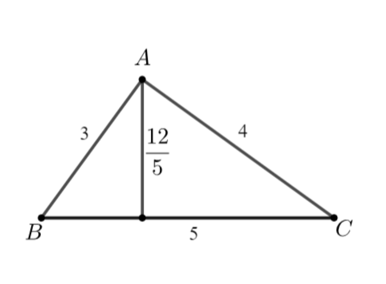
Teorema 4.2.3: Área y perímetro de un triángulo

Sea ABC un triángulo, a, b, c sus lados (con $AC = b$) y sea h su altura desde B. Entonces, si P es su perímetro y $A_\triangle$ es su área,

$$P = a + b + c \quad \text{y} \quad A_\triangle = \frac{bh}{2}$$

Ejemplo 4.2.5

Halle el área y el perímetro del siguiente triángulo:



Solución. Por las fórmulas, su perímetro será

$$3 + 4 + 5 = 12$$

y su área será

$$\frac{bh}{2} = \frac{5 \cdot \frac{12}{5}}{2} = 6$$

□

No fue el caso del problema anterior, pero muchas veces nos darán las distancias en unidades (u), centímetros (cm) o metros (m). En dichos casos, el área debe ir en unidades cuadradas (u^2), centímetros cuadrados (cm^2) o metros cuadrados (m^2), respectivamente, pues mide dos dimensiones.

Como se imaginarán, las propiedades básicas de los triángulos nos permiten resolver una gran cantidad de problemas. Sin embargo, problemas más difíciles requerirán cosas más interesantes.

Definición 4.2.4: Congruencia

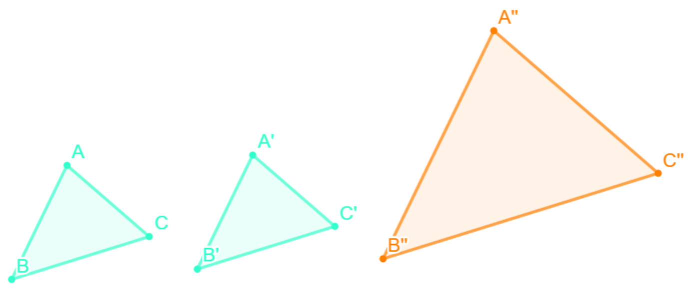
Decimos que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son *congruentes* si son exactamente iguales pero están en distintas posiciones. Se escribe

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Definición 4.2.5: Semejanza

Decimos que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son *semejantes* si uno es una versión agrandada o achicada pero proporcional del otro. Se escribe

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$$

Y bien, aquí están formalmente sus propiedades:

Teorema 4.2.4: Proporciones

Tenemos lo siguiente:

- Si $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, se cumple que

$$AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C' \quad \text{y} \quad \angle A = \angle A', \angle C = \angle C', \angle B = \angle B'$$

- Si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \quad \text{y} \quad \angle A = \angle A', \angle C = \angle C', \angle B = \angle B'$$

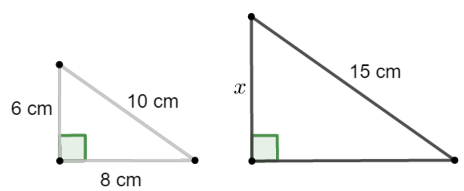
A la constante k le llamamos *proporción de semejanza*. Además, si $[ABC]$ y $[A'B'C']$ denotan las áreas de $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, respectivamente,

$$\frac{[ABC]}{[A'B'C']} = k^2$$

Ejemplo 4.2.6: OPM Fase I 2011

Dado un triángulo rectángulo cuyos lados miden 6 cm, 8 cm y 10 cm. Consideremos un triángulo semejante al primero con hipotenusa 15 cm. Halle la medida, en centímetros, de su cateto menor.

Solución. Digamos que el cateto que queremos hallar vale x.



Como los triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, es decir,

$$\frac{x}{15} = \frac{6}{10}$$

Ahora, simplemente despejamos:

$$\begin{aligned}\frac{x}{15} &= \frac{6}{10}\\ \frac{x}{15} &= \frac{3}{5}\\ x &= 15 \cdot \frac{3}{5}\\ x &= 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del cateto buscado es 9 cm.

□

Bien, ya vemos que, si dos triángulos son congruentes o semejantes entre sí, tendrán muchas propiedades interesantes. Sin embargo, muchas veces tendremos que probar nosotros mismos que son congruentes o semejantes. ¿Y cómo lo hacemos?

Teorema 4.2.5: Criterios de congruencia

Si se tiene cualquiera de las siguientes situaciones, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$:

- (LLL). Los 3 pares de lados son iguales, o sea, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.
- (LAL). 2 pares de lados y el par de ángulos entre ellos son iguales, por ejemplo, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$
- (ALA). 2 pares de ángulos y el par de lados entre ellos son iguales, por ejemplo, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $AB = A'B'$

Teorema 4.2.6: Criterios de semejanza

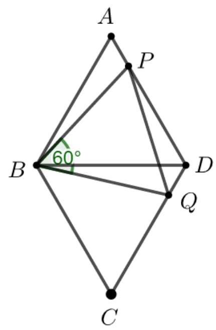
Si se tiene cualquiera de las siguientes situaciones, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$:

- (LLL). Los 3 pares de lados son proporcionales, o sea, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.
- (LAL). 2 pares de lados son proporcionales y los pares de ángulos entre ellos son iguales, por ejemplo, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\angle A = \angle A'$
- (AA). 2 pares de ángulos son iguales, por ejemplo, $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B'$

Si los ven muy complicados, relájense. No lo son tanto. Estoy seguro de que si ven los ejemplos los entenderán:

Ejemplo 4.2.7: OPM Fase II 2009

Un rombo $ABCD$ se divide en dos triángulos equiláteros por la diagonal $\overline{BD}$. Los puntos P y Q están en los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, y son tales que $\angle PBQ = 60°$. Determine las medidas de los ángulos restantes de $\triangle PBQ$.



Solución. Notemos que

- $$\begin{aligned}\angle PBA &= \angle DBA - \angle DBP \\ &= 60° - (\angle QBP - \angle QBD) \\ &= 60° - (60° - \angle QBD) \\ &= \angle QBD\end{aligned}$$

- $$AB = DB$$

- $$\begin{aligned}\angle BAP &= \angle BAD \\ &= 60° \\ &= \angle BDC \\ &= \angle BDQ\end{aligned}$$

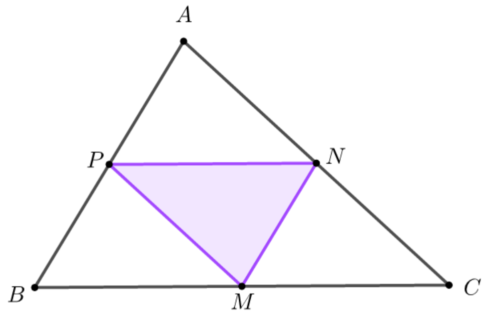
Luego, por el criterio ALA, $\triangle PAB$ y $\triangle DBQ$ son congruentes. Como son congruentes, $BP = BQ$, es decir, $\triangle BQP$ es isósceles, por lo que, si los ángulos de su base miden x,

$$\begin{aligned}2x + 60° &= 180° \\ x &= 60°\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos que los tres ángulos de $\triangle BQP$ miden $60°$. □

Ejemplo 4.2.8

Sea ABC un triángulo y sean M, N y P los puntos medios de sus lados. Pruebe que el área de $\triangle ABC$ es cuatro veces el área de $\triangle MNP$.



Solución. Como NP es base media, mide la mitad de BC, es decir,

$$\frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}$$

Se cumple lo mismo para las otras bases medias, por lo que tendremos que

$$\frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, por el criterio LLL, $\triangle MNP$ y $\triangle ABC$ son semejantes a razón $\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\frac{[ABC]}{[MNP]} = 2^2 = 4$$

es decir, el área de $\triangle ABC$ es 4 veces el área de $\triangle MNP$, como queríamos.

□

Pasemos ahora a estudiar los triángulos rectángulos empezando por un teorema famosísimo que de seguro conocen:

Teorema 4.2.7: Teorema de Pitágoras

Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C y cuya hipotenusa es c. Entonces,

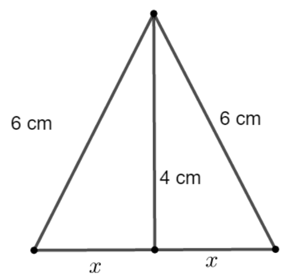
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Este teorema es muy poderoso, así que siempre ténganlo en mente.

Ejemplo 4.2.9: OPM Fase I 2014

La altura de un triángulo isósceles mide 4 cm y sus lados miden 6 cm. Halle su área.

Solución. Como la altura de un triángulo isósceles biseca su base, digamos que las dos mitades valen x.



Ahora, como es altura, se nos forman dos triángulos rectángulos. Por lo tanto, podemos aplicar Pitágoras para hallar el valor de x:

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 &= 6^2 \\ x^2 + 16 &= 36 \\ x^2 &= 20 \\ x &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Luego, la base del triángulo será $2x = 4\sqrt{5}$. Entonces, por la fórmula de área,

$$\frac{bh}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4}{2} = 8\sqrt{5}$$

Por lo tanto, su área es $8\sqrt{5}$ cm^2.

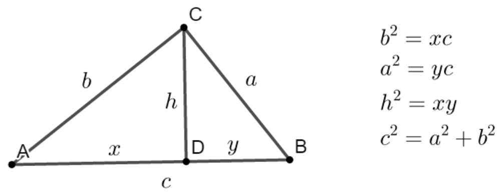
□

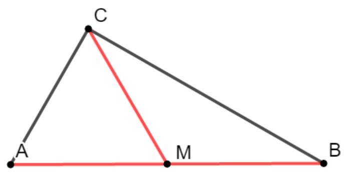
Además de Pitágoras, usando semejanzas y congruencias podemos demostrar varias propiedades más:

Teorema 4.2.8: Propiedades del triángulo rectángulo

Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, sea D el pie de su altura desde C y sea M el punto medio de AB. Entonces,

- $AC^2 = AD \cdot AB$
- $CB^2 = BD \cdot BA$
- $CD^2 = AD \cdot DB$
- $AM = MB = MC$
- Su área será $\dfrac{CA \cdot CB}{2}$

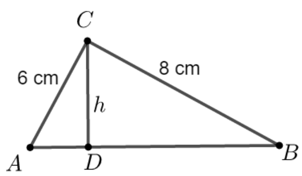




Ejemplo 4.2.10: OPM Fase I 2013

El triángulo ABC tiene ángulo recto en C y sus catetos miden 8 y 6 cm. Halle la medida de la altura trazada desde C.

Solución. Interesante problema... Llamemos a la altura h.



En primer lugar, por Pitágoras, podemos hallar AB:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ AB^2 &= 6^2 + 8^2 \\ AB^2 &= 100 \\ AB &= 10 \end{aligned}$$

Ahora, con las propiedades de los triángulos rectángulos, podemos hallar AD y DB:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD \cdot AB \\ AD &= \frac{AC^2}{AB} \\ AD &= \frac{36}{10} \\ AD &= \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CB^2 &= BD \cdot BA \\ BD &= \frac{CB^2}{BA} \\ BD &= \frac{64}{10} \\ BD &= \frac{32}{5} \end{aligned}$$

Para finalizar, usamos también las propiedades del triángulo rectángulo (o pueden usar semejanzas):

$$\begin{aligned} h^2 &= AD \cdot DB \\ h^2 &= \frac{18}{5} \cdot \frac{32}{5} \\ h^2 &= \frac{576}{25} \\ h &= \frac{24}{5} \end{aligned}$$

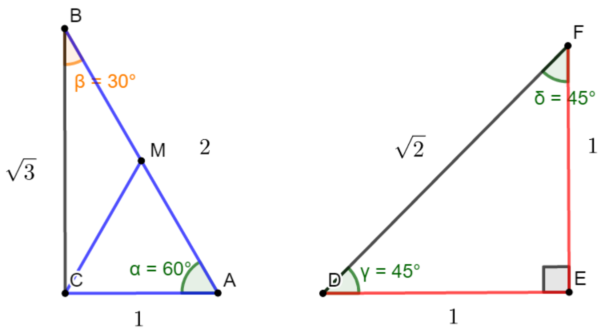
□

Ahora, hay unos triángulos rectángulos que tienen incluso más propiedades bonitas:

Teorema 4.2.9: Triángulos rectángulos especiales

A los triángulos cuyos ángulos miden $30° - 60° - 90°$ y $45° - 45° - 90°$ los llamamos *triángulos especiales*. Si $\triangle ABC$ es $30° - 60° - 90°$ con $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$ y M es el punto medio de AB, y $\triangle DEF$ es $45° - 45° - 90°$ con $\angle D = \angle F = 45°$, $\angle E = 90°$, se cumple lo siguiente:

- $\frac{BC}{AC} = \sqrt{3}$, $\frac{AB}{AC} = 2$
- $AC = AM = MB = MC$
- $ED = EF$
- $\frac{DF}{ED} = \frac{DF}{EF} = \sqrt{2}$

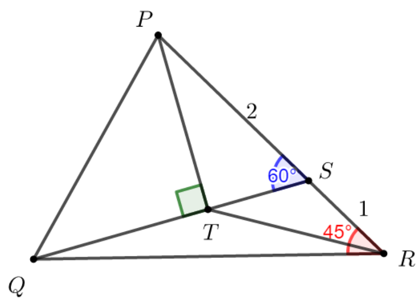


De seguro los que ya han dado trigonometría ven estos triángulos hasta en sus sueños. En fin, lo más importante es la proporción que hay entre sus lados. Veamos un ejemplo de su aplicación:

Ejemplo 4.2.11: OPM Fase II 2018

En el triángulo PQR, $PS = 2$, $SR = 1$ y $\angle PRQ = 45°$. Seaa T el pie de la perpendicular trazada desde P al segmento $\overline{SQ}$ y $\angle PST = 60°$.
a) Determine $\angle QPR$
b) Encuentre el área de $\triangle QPS$.

Solución. Este es un problema bellísimo.



Lo primero que notamos es que $\triangle PTS$ es un triángulo especial. Luego,

$$\frac{TS}{PS} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{TS}{2} = \frac{1}{2}$$
$$TS = 1$$

Entonces, $\triangle STR$ es isósceles con $ST = SR$, por lo que

$$\angle RTS = \angle SRT = \frac{180° - \angle TSR}{2} = \frac{180° - (180° - 60°)}{2} = 30°$$

Sin embargo, $\angle TPR = 30^\circ$ también, por lo que $PT = TR$. Además.

$$\begin{aligned}
\angle RQT &= 180^\circ - \angle QSR - \angle SRQ \\
\angle RQT &= 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ \\
\angle RQT &= 15^\circ
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\angle TRQ &= \angle SRQ - \angle SRT \\
\angle TRQ &= 45^\circ - 30^\circ \\
\angle TRQ &= 15^\circ
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $TQ = TR$. Sin embargo, eso implicaría que

$$TQ = TR = TP = \sqrt{3}$$

(la última igualdad se debe a que TP es un cateto en el triángulo especial PTS). Ese era el golpe fatal. Ahora, terminar el problema no es muy difícil. Como TPQ es un triángulo rectángulo isósceles, $\angle QPT = 45^\circ$. Por lo tanto,

$$\angle QPR = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

Finalmente,

$$[PQS] = \frac{QS \cdot PT}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3})}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

□

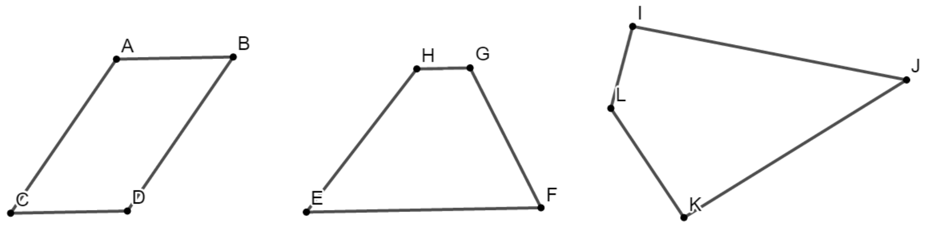
4.3. Cuadriláteros

Habiendo visto tanto del triángulo, creo que lo mejor es tomarnos una pausa y ver otro tema importante e interesante: los cuadriláteros.

Definición 4.3.1: Cuadriláteros

Un *cuadrilátero* es un polígono de 4 lados. Los cuadrilátieros convexos se clasifican como sigue:

- Si sus dos pares de lados opuestos son paralelos, es un *paralelogramo*.
- Si tiene un par de lados opuestos paralelos, es un *trapecio*.
- Si no hay 2 de sus lados paralelos entre sí, es un *trapezoide*.



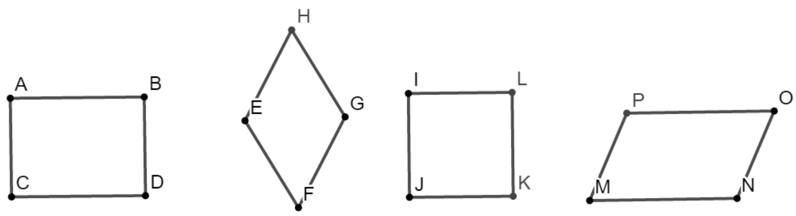
paralelogramo trapecio trapezoide

Los cuadriláteros con más propiedades interesantes son los paralelogramos. ¡Veámoslo!

Definición 4.3.2: Paralelogramos

A su vez, los paralelogramos también se subdividen:

- Si sus cuatro ángulos son rectos, es un *rectángulo.*
- Si sus cuatro lados son iguales, es un *rombo.*
- Si es un rectángulo y un rombo a la vez, es un *cuadrado.*
- Si no es ninguno de los anteriores, es un *romboide.*



rectángulo rombo cuadrado romboide

Teorema 4.3.1: Propiedades de los paralelogramos

Las siguientes propiedades se cumplen en los paralelogramos:

- Los lados y ángulos opuestos son iguales.
- Las diagonales se bisecan mutuamente
- Si sus lados miden a, b y su altura hacia el lado que mide b es h, su perímetro es $2(a+b)$ y su área es $b \cdot h$.

Rectángulo

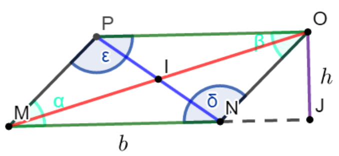
- Sus diagonales tienen igual longitud
- Si sus lados miden a y b, su área es ab.

Rombo

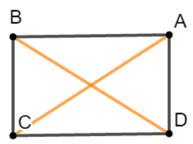
- Sus diagonales son perpendiculares.
- Si sus lados miden a y sus diagonales miden d_1 y d_2, su perímetro será $4a$ y su área será $\dfrac{d_1 d_2}{2}$

Cuadrado

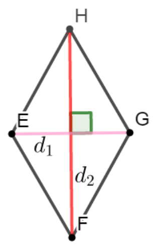
- Tiene básicamente todas las propiedades anteriores.
- Si su lado mide l, su área es l^2.



$MP = NO$
$MN = PO$
$MI = IO$
$PI = IN$
$\alpha = \beta$
$\epsilon = \delta$
Área $= bh$



$AC = BD$
Área $= CD \cdot AD$

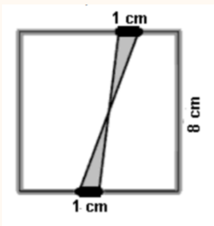


$EG \perp FH$
Área $= \dfrac{d_1 d_2}{2}$

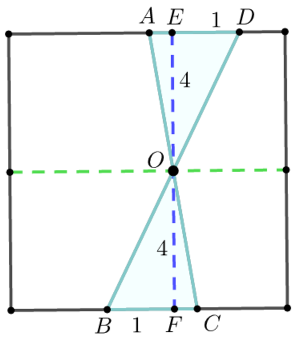
Veamos algunas aplicaciones de los paralelogramos:

Ejemplo 4.3.1: Canguro 2017

Los dos segmentos de 1 cm de largo, situados en lados opuestos del cuadrado de lado 8 cm, se unen como se indica en la figura. ¿Cuánto vale, en cm^2, el área de la región gris?



Solución. Analicemos bien ese dibujito.



Como $AD = BC$ y además son paralelos, $ABCD$ es un paralelogramo. Por lo tanto, si sus diagonales se cortan en O, $OB = OD$ y $OA = OC$. Luego, como además $\angle BOC = \angle DOA$ por opuestos por el vértice, por el criterio LAL, $\triangle ODA$ y $\triangle OBC$ serán congruentes. Entonces, si trazamos las perpendiculares desde O a AD y BC y sus pies son E y F, tendremos que $OE = OF = 4$. Finalmente, ya obtendríamos que el área sombreada es

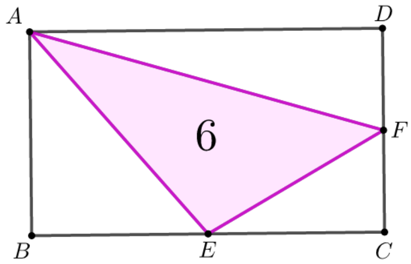
$$2 \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \text{cm}^2 = 4\text{cm}^2$$

□

Ejemplo 4.3.2: OPM Fase II 2011

Considere un rectángulo $ABCD$. Sea E el punto medio de $\overline{BC}$ y F el punto medio del lado $\overline{CD}$. Si el área del triángulo AEF es 6 unidades cuadradas, encuentre el área del rectángulo $ABCD$.

Solución. Empecemos por decir que la base del rectángulo vale b y su altura vale h.



Ahora, tenemos que

- $[AEF] = 6$
- $[ABE] = \dfrac{AB \cdot BE}{2} = \dfrac{h \cdot \frac{b}{2}}{2} = \dfrac{bh}{4}$
- $[ECF] = \dfrac{EC \cdot CF}{2} = \dfrac{\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2} = \dfrac{bh}{8}$
- $[AFD] = \dfrac{AD \cdot DF}{2} = \dfrac{b \cdot \frac{h}{2}}{2} = \dfrac{bh}{4}$

Sin embargo, las suma del área de estos cuatro triángulos es igual al área total del rectángulo, es decir,

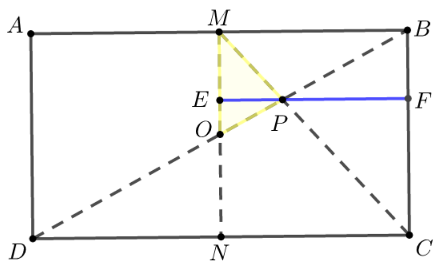
$$\begin{aligned} bh &= 6 + \frac{bh}{4} + \frac{bh}{8} + \frac{bh}{4} \\ bh &= \frac{5bh}{8} + 6 \\ \frac{3bh}{8} &= 6 \\ bh &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área que buscamos es 16 unidades cuadradas. □

Ejemplo 4.3.3: OPM Fase II 2019

Sea $ABCD$ un rectángulo de área 1000 y sean M y N los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Halle el área del triángulo limitado por MN, BD y MC.

Solución. Este problema es truculento. Como en el anterior, digamos que la base es b y la altura h. Entonces, sabemos que $bh = 1000$.



Noten que $MDNB$ y $MNCB$ son paralelogramos, por lo que $MO = \frac{h}{2}$. Como además $\angle POM = \angle PBC$ y $\angle OMP = \angle BCP$ por alternos internos, por el criterio AA, $\triangle PMO$ y $\triangle PCB$ son semejantes a razón $1 : 2$. Por lo tanto, si PE y PF son sus respectivas alturas, $\frac{PE}{PF} = \frac{1}{2}$. Sin embargo, también tenemos que

$$PE + PF = MB = \frac{b}{2}$$

Por lo anterior, debemos tener que $PE = \frac{b}{6}$ y $PF = \frac{b}{3}$. Finalmente,

$$[MOP] = \frac{MO \cdot EP}{2} = \frac{\frac{h}{2} \cdot \frac{b}{6}}{2} = \frac{bh}{24} = \frac{1000}{24} = \frac{125}{3}$$

□

Una fórmula que quizá les llegue a ser útil:

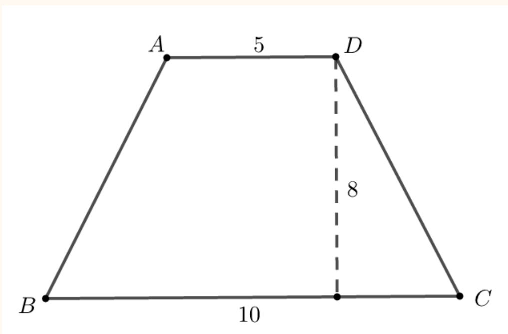
Teorema 4.3.2: Área del trapecio

A los lados paralelos del trapecio le llamamos *bases*, y a la distancia entre ellos, como en el paralelogramo, *altura*. Si sus bases son b_1, b_2 y su altura es h, el área A del trapecio es

$$A = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$$

Ejemplo 4.3.4

Halle el área de la siguiente figura:



Solución. Por la fórmula de área, obtenemos que es

$$\frac{(5 + 10) \cdot 8}{2} = 60$$

□

A un trapecio como el anterior, tal que sus dos lados que no son bases son iguales, le llamamos *trapecio isósceles*. Si el trapecio tuviera algún ángulo recto, le llamaríamos *trapecio rectángulo*.

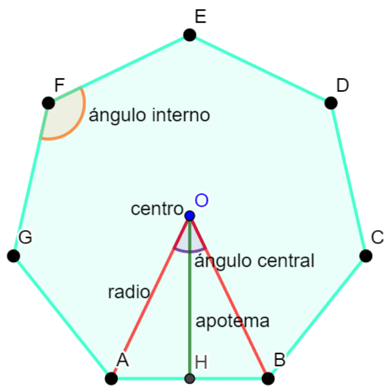
4.4. Polígonos

Ya vimos a los triángulos y a los cuadriláteros. Como no tienen tantos lados, es muy fácil hallarles propiedades generales. Sin embargo, esto se vuelve muy difícil en los polígonos de más lados. Aun así, veamos algunas cosas:

Definición 4.4.1: Polígonos regulares

En un polígono regular,

- Al centro, pues le llamamos *centro*
- A cualquier segmento del centro a un vértice del polígono le llamamos *radio*
- A los ángulos cuyos lados son dos radios consecutivos y su vértice es el centro, le llamamos *ángulo central*
- Al segmento perpendicular del centro a algún lado le llamamos *apotema*.



Teorema 4.4.1: Propiedades del polígono de n lados

En un polígono de n lados se cumple lo siguiente:

- La suma de los ángulos interiores es igual a $(n-2)\cdot 180°$.

Polígono regular

- Sus ángulos interiores miden $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$
- Sus ángulos centrales miden $\frac{360°}{n}$
- Si sus lados miden l, su perímetro es nl
- Si su apotema mide a, su área mide $\frac{nla}{2}$

No es que sean tan frecuentes los polígonos muy grandes, pero siempre nos topamos con alguno de vez en cuando. Es más, quizá descifren ustedes mismos cómo deducir las fórmulas de arriba. En dicho caso, no tienen que aprendérselas de memoria.

Ejemplo 4.4.1: OPM Fase I 2014

Las medias en grados de los ángulos de un cuadrilétero son x, $x+10$, $x+20$ y $x+30$. Halle el valor del mayor.

Solución. Como se trata de un cuadrilátero, por la fórmula, la suma de sus ángulos interiores debe ser

$$(4-2)\cdot 180° = 360°$$

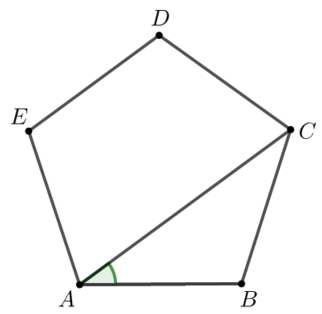
Luego,

$$\begin{aligned} x+(x+10)+(x+20)+(x+30) &= 360 \\ 4x+60 &= 360 \\ 4x &= 300 \\ x &= 75 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el mayor de sus ángulos mide $75° + 30° = 105°$. □

Ejemplo 4.4.2: OPM Fase I 2011

Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Halle la medida del ángulo CAB.



Solución. Por la fórmula, el ángulo interior de un pentágono regular mide

$$\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

Finalmente, como $\triangle ABC$ es isósceles con $BC = BA$,

$$\angle CAB = \frac{180^\circ - \angle CBA}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

□

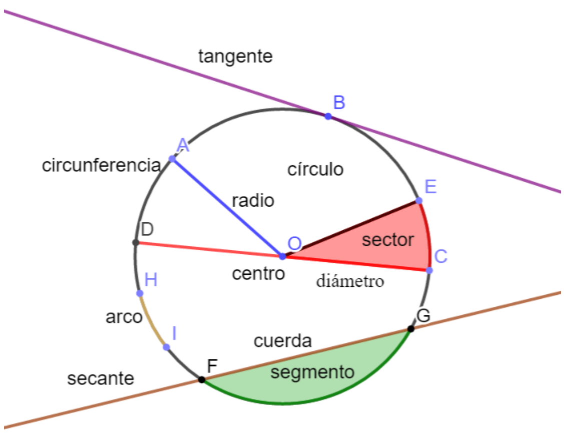
4.5. Circunferencia

Y bien, después de ver a los polígonos regulares de n lados, estudiemos al polígono regular de infinitos lados. ¿Nunca habían visto a la circunferencia de ese modo?

Definición 4.5.1: Circunferencia

Al conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado *centro* se le conoce como *circunferencia*.

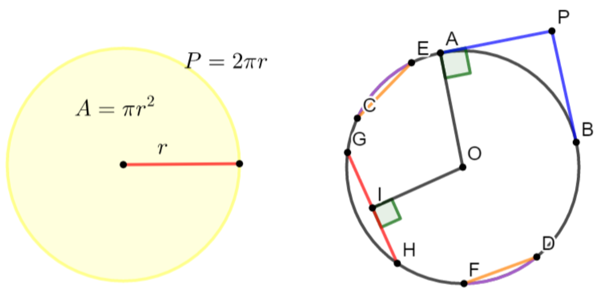
- A la distancia entre cualquier punto de la circunferencia y el centro se le conoce como *radio*.
- A cualquier segmento cuyos extremos estén sobre la circunferencia se le conoce como *cuerda*.
- A cualquier cuerda que pase por el centro se le conoce como *diámetro*.
- Si una recta corta a la circunferencia, se le conoce como *secante*.
- Si una recta toca la circunferencia en tan solo un punto se le conoce como *tangente*.
- A un "pedazo" de circunferencia delimitado por dos puntos le llamamos *arco*.
- A la región del plano comprendida dentro de la circunferencia le llamamos *círculo*.
- A la región del plano comprendida entre dos radios y un arco le llamamos *sector circular*.
- A la región del plano entre una cuerda y un arco le llamamos *segmento circular*.
- Decimos que una circunferencia está *inscrita* en un polígono si es tangente a todos sus lados internamente.
- Decimos que una circunferencia está *circunscrita* a un polígono si contiene a todos los vértices del polígono.



Teorema 4.5.1: Propiedades de la circunferencia

Consideremos una circunferencia de centro O y radio r:

- Los dos segmentos tangentes desde el mismo punto a la circunferencia son iguales.
- Si una tangente toca a la circunferencia, esta es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.
- La perpendicular desde O a cualquier cuerda la biseca.
- Dos cuerdas de igual longitud abarcan arcos de igual longitud.
- La longitud o perímetro de la circunferencia es $2\pi r$
- El área del círculo es πr^2
- Si el ángulo central de un arco es $\theta°$, su longitud es $\frac{\theta°}{360°} \cdot 2\pi r$
- Si el ángulo central de un sector circular es $\theta°$, su área es $\frac{\theta°}{360°} \cdot \pi r^2$



Recuerden que π =3.14159... Cuando vamos a trabajar y necesitamos usarlo, redondéenlo a 3.14. Casi siempre bastará así. Eso sí, **si les piden el valor exacto o no necesitan calcularlo, déjenlo expresado en** π. Hora de ver algunos ejemplos.

Ejemplo 4.5.1: OPM Fase I 2011

Al rodar una rueda de 3 cm de radio recorre 18 m. Halle el número de vueltas completas que da la rueda.

Solución. Noten que, por cada vuelta que da, recorre una distancia igual a su perímetro, que es

$$2\pi \cdot 3\text{cm} = 6\pi \cdot \text{cm}$$

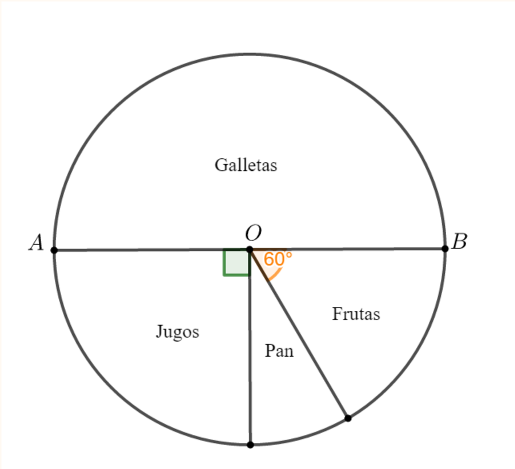
Ahora, en 18 m hay 1800 cm, por lo que la cantidad de vueltas que dio fue

$$\frac{1800\text{cm}}{6\pi \cdot \text{cm}} = \frac{300}{\pi}$$

Esa cantidad les da, si redondean π a 3.14, aproximadamente 95.54. Por lo tanto, dio 95 vueltas completas. $\square$

Ejemplo 4.5.2: OPM Fase I 2012

El diagrama que se muestra es un círculo de centro O y de diámetro $\overline{AB}$ y representa la preferencia de alimentos en la merienda de 600 estudiantes. Halle la cantidad de estudiantes que prefieren pan.



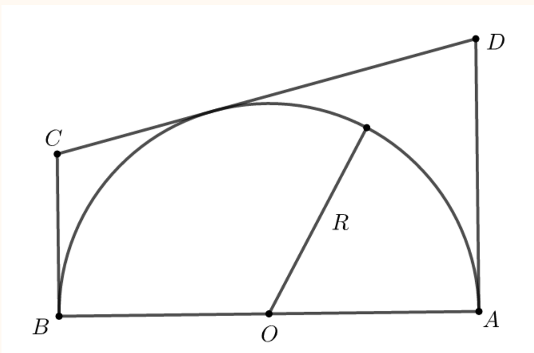
Solución. Noten que el ángulo que le corresponde al sector circular que abarca el pan es $30°$. Luego, como $\dfrac{30°}{360°} = \dfrac{1}{12}$, eso quiere decir que $\frac{1}{12}$ de los estudiantes prefieren pan, es decir,

$$\frac{1}{12} \cdot 600 = 50$$

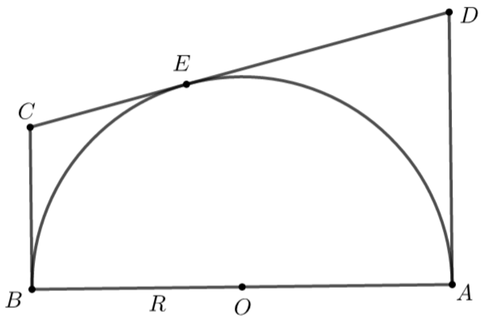
estudiantes prefieren pan. □

Ejemplo 4.5.3: Manual

En la siguiente figura, $BC + AD = 12$ y $AB + CD = 20$. Calcular el valor de R.



Solución. Digamos que el punto de tangencia de CD con la semicircunferencia es E.



Como CE y CB son tangentes desde C, $CE = CB$. Análogamente, $DE = DA$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{AB}{2} \\ &= \frac{(AB + CD) - CD}{2} \\ &= \frac{(AB + CD) - (CE + ED)}{2} \\ &= \frac{(AB + CD) - (BC + AD)}{2} \\ &= \frac{20 - 12}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

□

Ahora veamos cuán interesante se pone el asunto cuando metemos a los ángulos en esto:

Definición 4.5.2: Ángulos en la circunferencia

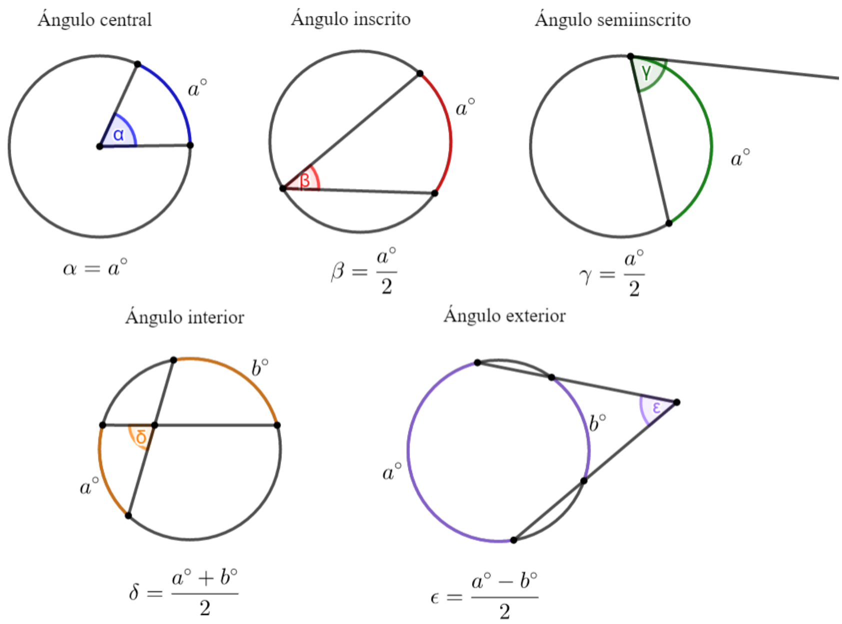
En la circunferencia, definimos los siguientes tipos de ángulos:

- Si su vértice es el centro y sus lados son dos radios, es un *ángulo central.* Definimos que el arco que abarca este ángulo vale lo mismo que él.
- Si su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas, es un *ángulo inscrito.*
- Si su vértice está sobre la circunferencia, uno de los lados es una cuerda y el otro lado es una tangente, es un *ángulo semiinscrito.*
- Si su vértice está dentro del círculo, es un *ángulo interior.*
- Si su vértice está fuera del círculo, es un *ángulo exterior.*

Teorema 4.5.2: Medidas de los ángulos en una circunferencia

En una circunferencia, saber la medida de los arcos nos permite saber cuánto miden sus ángulos:

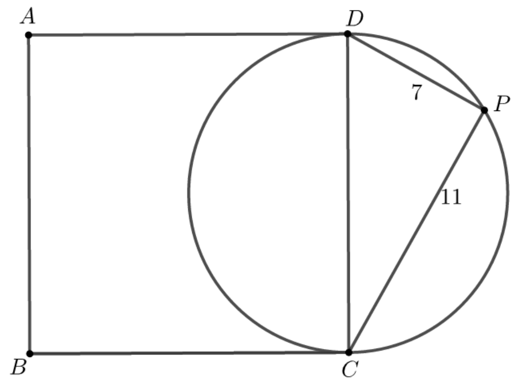
- El ángulo central, por definición, mide lo mismo que el arco que abarca.
- El ángulo inscrito mide la mitad del arco que abarca.
- El ángulo semiinscrito mide la mitad del arco que abarca.
- Si prolongamos los lados del ángulo interior hasta que corten a la circunferencia en dos arcos, el ángulo valdría la mitad de la suma de esos dos arcos.
- Si prolongamos los lados del ángulo exterior hasta que corten a la circunferencia en dos arcos, el ángulo valdría la mitad de la diferencia de esos dos arcos.



Un caso particular pero muy frecuente del teorema anterior es que, cuando un ángulo está inscrito en la mitad de la circunferencia, es decir, si la cuerda que abarca es el diámetro, su medida es 90°.

Ejemplo 4.5.4: OPM Fase I 2012

Sea $ABCD$ un cuadrado y P un punto en el círculo de diámetro $\overline{CD}$. Si $CP = 11$, $PD = 7$, halle el área en unidades cuadradas del cuadrado.



Solución. Notemos que, como el arco $\overset{\frown}{CD}$ es una semicircunferencia, mide 180°. Luego,

$$\angle DPC = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Entonces, PDC es rectángulo. Finalmente, por el teorema de Pitágoras,

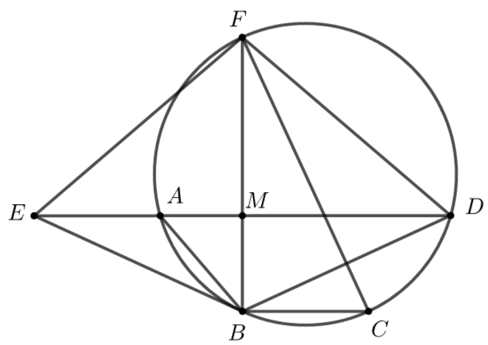
$$[ABCD] = CD^2 = 7^2 + 11^2 = 170$$

□

Ejemplo 4.5.5: OPM Fase II 2013

Se escogen cuatro puntos en una circunferencia de tal manera que los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ tengan la misma longitud, y el arco $\overset{\frown}{AD}$ sea de mayor longitud que los tres anteriores. La recta $\overleftrightarrow{AD}$ y la recta tangente a la circunferencia en B se cortan en E. Sea F el punto opuesto del diámetro de la circunferencia que tiene extremo C. Demuestre que el triángulo DEF es isósceles.

Solución. Sea M el punto medio de ED.



En este bello problema les recomiendo que hagan el dibujo nítido y exacto a regla y compás. Créanme, ayuda mucho. ¿A qué? Pues a observar y saber qué probar. Noten que, como $\angle BED$ es un ángulo exterior y $\angle ADB$ es inscrito,

$$\begin{aligned}\angle BED &= \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AB}}{2} \\ &= \frac{2\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AB}}{2} \\ &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \\ &= \angle ADB \\ &= \angle EDB\end{aligned}$$

Luego, $\triangle BDE$ es isósceles con $BE = BD$. Noten que, como CF es diámetro, $BC \perp BF$. Ahora, como

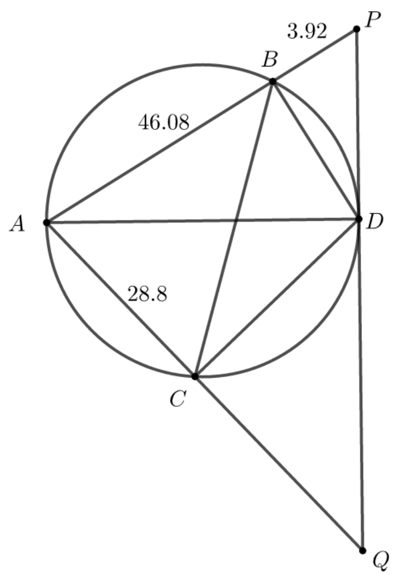
$$\angle EDB = \angle ADB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \angle CBD,$$

Por ángulos alternos internos, $BC \parallel DE$. Sin embargo esto implicaría que también $DE \perp BF$, pero, como $\triangle BDE$ es isósceles, $DE \perp BM$. Por lo tanto, $B - M - F$ son colineales, por lo que MF es altura de $\triangle FEC$ y a la vez biseca su base. Finalmente, esto implica que $\triangle FED$ es isósceles.

$\square$

Ejemplo 4.5.6: OPM Fase II 2014

En una circunferencia se consideran cuatro puntos distintos A, B, C, D tales que $\overline{AD}$ es diámetro, y se traza la recta tangente por el punto D. Sean P el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con la tangente y Q el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ con la tangente. Si $AB = 46.08$, $AC = 28.80$ y $BP = 3.92$, calcular la medida del segmento $\overline{CQ}$.



Solución 1. Este problema tiene la mala fama de ser un problema difícil. La verdad, yo pienso que es en parte porque los decimales asustan a cualquiera. Como hay muchos ángulos inscritos, semiinscritos y triángulos rectángulos, quizá comenzar a buscar ángulos nos ayude. Recuerden que ángulos iguales inducen triángulos semejantes. Como AD es diámetro y PQ es tangente,

$$\angle DCA = \angle ABD = \angle ADQ = \angle PDA = 90^\circ$$

Además, como PQ es tangente, $\angle CDQ = \angle CAD$ y $\angle PDB = \angle DAB$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\angle ABC &= \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\\
&= \angle ADC\\
&= 90^\circ - \angle CAD\\
&= 90^\circ - \angle CDQ\\
&= \angle DQC\\
&= \angle PQA
\end{aligned}$$

Luego, por el criterio AA, $\triangle ACB \sim \triangle APQ$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{AQ}{AB} &= \frac{AP}{AC}\\
\frac{AC+CQ}{AB} &= \frac{AB+BP}{AC}\\
\frac{28.8+CQ}{46.08} &= \frac{46.08+3.92}{28.8}\\
CQ &= \frac{50\times 46.08}{28.8} - 28.8\\
CQ &= 51.2
\end{aligned}$$

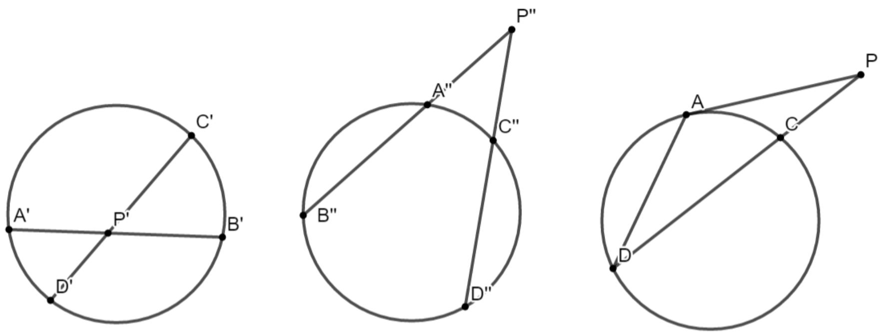
□

Agreguémosle una última especia a la sopa.

Teorema 4.5.3: Potencia de Punto

Si dos cuerdas AB y CD se cortan en P, entonces

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

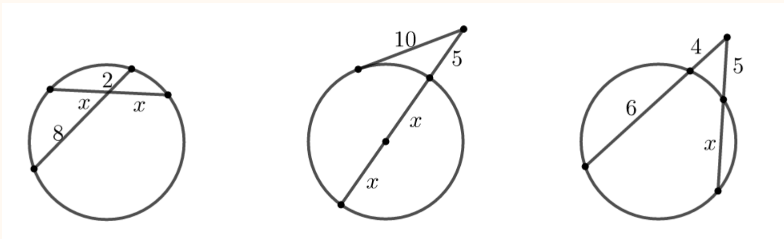


$P'A' \cdot P'B' = P'C' \cdot P'D'$ $\quad$ $P''A'' \cdot P''B'' = P''C'' \cdot P''D''$ $\quad$ $PA^2 = PC \cdot PD$

Noten que el teorema aplica en cualquier situación: si el punto P está dentro o fuera de la circunferencia... ¡e incluso si los puntos A y B son el mismo, es decir, si PA es tangente a la circunferencia!

Ejemplo 4.5.7

Calcule el valor de x en las siguientes figuras:



Solución. Apliquemos el teorema:

- Primera figura

$$x \cdot x = 2 \cdot 8$$
$$x^2 = 16$$
$$x = 4$$

- Segunda figura

$$10^2 = 5 \cdot (5 + 2x)$$
$$100 = 25 + 10x$$
$$x = \frac{15}{2}$$

- <u>Tercera figura</u>

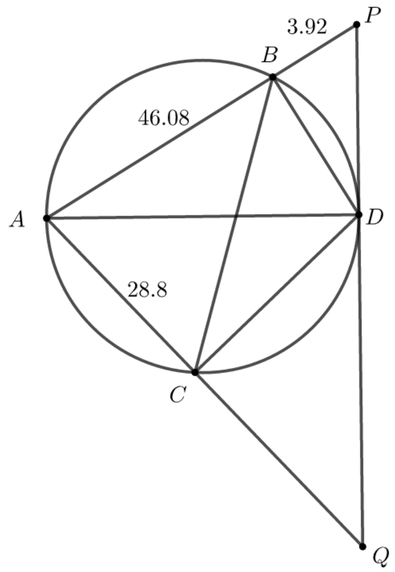
$$
\begin{aligned}
5 \cdot (5 + x) &= 4 \cdot (4 + 6) \\
25 + 5x &= 40 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 4.5.8: OPM Fase II 2014

En una circunferencia se consideran cuatro puntos distintos A, B, C, D tales que $\overline{AD}$ es diámetro, y se traza la recta tangente por el punto D. Sean P el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con la tangente y Q el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ con la tangente. Si $AB = 46.08$, $AC = 28.80$ y $BP = 3.92$, calcular la medida del segmento $\overline{CQ}$.

Solución 2. Ahora les presentaré otra solución para este infame problema. No sé cuál les guste más.



Como PD es tangente,

$$
\begin{aligned}
PD^2 &= PB \cdot PA \\
PD^2 &= 3.92 \times 50 \\
PD^2 &= 196 \\
PD &= 14
\end{aligned}
$$

Ahora, por Pitágoras en $\triangle ADP$.

$$\begin{aligned} AD^2 + PD^2 &= AP^2 \\ AD^2 &= AP^2 - PD^2 \\ AD^2 &= 50^2 - 14^2 \\ AD^2 &= 2304 \\ AD &= 48 \end{aligned}$$

Ahora, como DQ es tangente, $DQ^2 = QC \cdot QA$. Sin embargo, por Pitágoras, $DQ^2 = AQ^2 - AD^2$. Luego,

$$\begin{aligned} QC \cdot QA &= AQ^2 - AD^2 \\ CQ \cdot (CQ + AC) &= (CQ + AC)^2 - 48^2 \\ CQ^2 + 28.8 \times CQ &= CQ^2 + 2 \times 28.8 \times CQ + 28.8^2 - 2304 \\ 1474.56 &= 28.8 \times CQ \\ CQ &= 51.2 \end{aligned}$$

□

4.6. Triángulo: parte 2

Al final, el tiempo pasa y los niños crecen... ¡Las propiedades de los triángulos igual!

Definición 4.6.1: Rectas notables

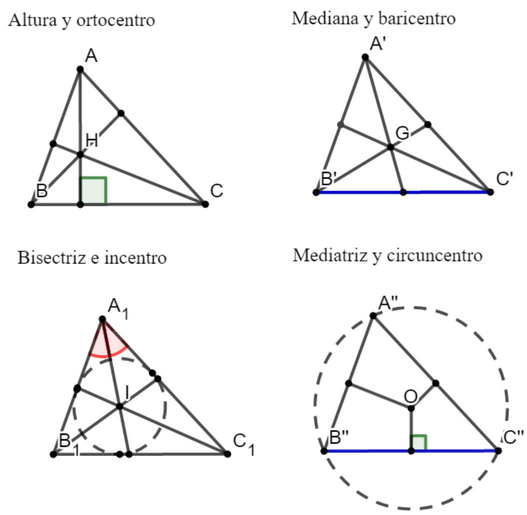
En un triángulo,

- Como ya sabemos, el segmento desde un vértice perpendicular al lado opuesto se conoce como *altura*.
- La recta perpendicular a un lado por su punto medio se conoce como *mediatriz*.
- El segmento desde un vértice al punto medio del lado opuesto se conoce como *mediana*
- La recta que biseca a un ángulo se conoce como *bisectriz*.

Teorema 4.6.1: Puntos notables

En un triángulo,

- Las tres alturas concurren en el *ortocentro*.
- Las tres mediatrices concurren en el *circuncentro*. Este punto es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo. A tal circunferencia se le conoce como *circuncírculo* y a su radio como *circunradio*.
- Las tres medianas concurren en el *baricentro*. A este punto también se le conoce como *gravicentro*, *centro de gravedad* o *centro de masa* porque, si recortáramos al triángulo y lo pusiéramos, desde el gravicentro, sobre la punta de un lápiz, estaría perfectamente equilibrado.
- Las tres bisectrices concurren en el *incentro*. Este punto es el centro del círculo tangente internamente a los tres lados del triángulo. A tal circunferencia se le conoce como *incírculo* y a su radio como *inradio*.

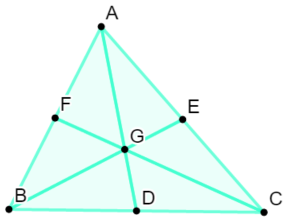


Interesante, ¿no? No sé si ya hayan visto estas rectas y estos puntos antes, pero supongo que al menos han escuchado su nombre. Ahora, como siempre, veamos más propiedades y ejemplos para ver su uso.

Teorema 4.6.2: Baricentro

Al trazar las medianas y considerar el baricentro,

- El baricentro divide a la mediana en razón 1:2
- Las tres medianas dividen a triángulo en 6 triangulitos de igual área.



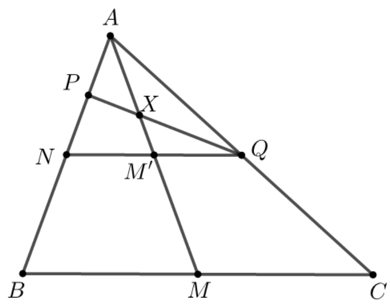
$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2$$

$$[GAF] = [GFB] = [GBD] = [GDC] = [GCE] = [GEA]$$

Ejemplo 4.6.1: OPM Fase II 2016

Sea ABC un triángulo. Se escogen los puntos P y Q en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Se traza el segmento $\overline{PQ}$ que corta a la mediana $\overline{AM}$ en X. SI $AP = \frac{1}{4}AB$ y $AQ = \frac{1}{2}AC$, encuentre el valor de la razón $\dfrac{PX}{PQ}$.

Solución. Sea N el punto medio de AB.



Noten que es claro que P es el punto medio de AN, pues

$$\begin{aligned}\frac{AP}{AN} &= \frac{AP}{\frac{AB}{2}} \\ &= 2 \cdot \frac{AP}{AB} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ahora, como NQ es base media de $\triangle ABC$, $NQ \parallel BC$. Si AM corta a NQ en M', $NM' \parallel BM$, por lo que NM' es base media de $\triangle ABM$. Análogamente, MQ' es base media de $\triangle AMC$. Luego,

$$NM' = \frac{BM}{2} = \frac{MC}{2} = M'Q$$

entonces, M' es el punto medio de NQ. Ahora, como las medianas AM' y PQ de $\triangle ANQ$ se cortan en X, X es el baricentro de $\triangle ANQ$. Finalmente, como el baricentro divide a las medianas en proporción $1:2$,

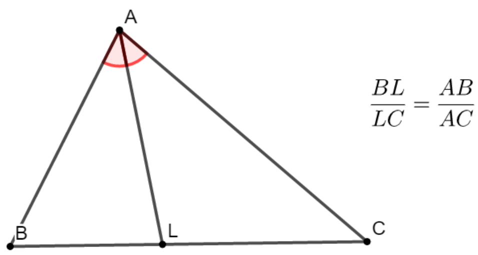
$$\frac{PX}{PQ} = \frac{PX}{PX+XQ} = \frac{PX}{PX+2PX} = \frac{PX}{3PX} = \frac{1}{3}$$

□

Teorema 4.6.3: Teorema de la bisectriz

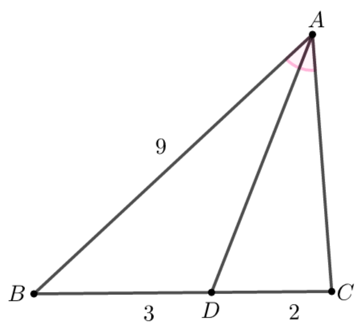
Sea ABC un triángulo, y digamos que su bisectriz por A corta a BC en L. Entonces,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$$



Ejemplo 4.6.2

Sea ABC un triángulo y sea D un punto sobre BC tal que AD biseca al ángulo $\angle BAC$. Si $AB = 9$, $BD = 3$ y $DC = 2$, halle el valor de AC.



Solución. Como AD es bisectriz, solo aplicamos el teorema de la bisectriz:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BD}$$
$$\frac{AC}{9} = \frac{2}{3}$$
$$AC = 6$$

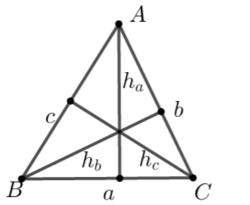
□

Bueno, ahora les viene un compendio de fórmulas distintas para calcular el área de un triángulo.

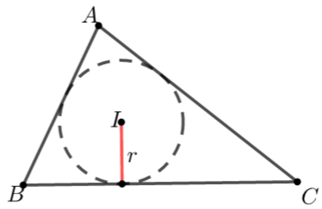
Teorema 4.6.4: Áreas del trińgulo

Sea ABC un triángulo, a, b, c sus lados y α, β, γ sus ángulos, h_a, h_b, h_c sus alturas, s su semiperímetro (la mitad del perímetro), r su inradio, R su circuncírculo y $A_\triangle$ su área. Entonces,

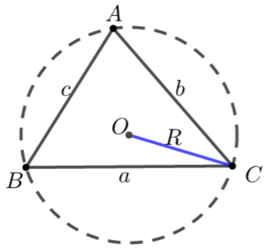
- $A_\triangle = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$
- $A_\triangle = rs$
- $A_\triangle = \dfrac{abc}{4R}$
- $A_\triangle = \dfrac{ab \operatorname{sen} \gamma}{2} = \dfrac{ac \operatorname{sen} \beta}{2} = \dfrac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2}$
- (Fórmula de Herón) $A_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
- (Solo si el trángulo es equilátero) $A_\triangle = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.



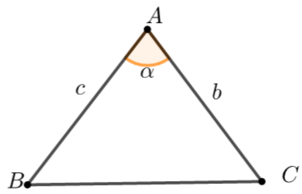
$$A_\triangle = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$



$$A_\triangle = rs$$



$$A_\triangle = \frac{abc}{4R}$$



$$A_\triangle = \frac{bc \operatorname{sen}\alpha}{2}$$

Sería excelente que se supieran todas estas fórmulas. Son de mucha ayuda.

Ejemplo 4.6.3

Halle el área del triángulo de lados 3, 4 y 5.

Solución 1. Esto es un ejercicio directo con la fórmula de Herón:

$$\begin{aligned} A_\triangle &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{3+4+5}{2}\cdot\left(\frac{3+4+5}{2}-3\right)\left(\frac{3+4+5}{2}-4\right)\left(\frac{3+4+5}{2}-5\right)} \\ &= \sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

□

Solución 2. Si tienen más experiencia o se detuvieron a pensar antes de aplicar Herón, de seguro vieron la solución linda:

Como $3^2+4^2=5^2$, por Pitágoras, este triángulo es rectángulo. Por lo tanto, su área es

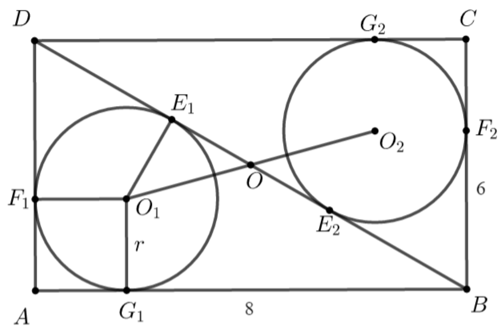
$$\frac{3\cdot 4}{2} = 6$$

□

Ejemplo 4.6.4: OPM Fase II 2010

El rectángulo $ABCD$ tiene sus lados de longitud $AB = 8$ y $BC = 6$. Considera las circunferencias con centros en O_1 y O_2 inscritas en los triángulos ABD y BCD. Encuentre la distancia entre O_1 y O_2.

Solución. Tracemos las circunferencias inscritas y nombremos a sus puntos de tangencia.



Por Pitágoras, obtenemos que $BD = 10$. Ahora, como $ABCD$ es un rectángulo, $\triangle ABD$ y $\triangle CDB$ son congruentes, de lo cual deducimos que $O_1 - O - O_2$ son colineales y además O es el punto medio de O_1O_2. Además, O también es el punto medio de DB. Ahora, como AF_1 y AG_1 son tangentes al incírculo desde A, $AF_1 = AG_1$. Sin embargo, también tenemos que $O_1F_1 \perp F_1A$ y $O_1G_1 \perp G_1A$. Luego, $AG_1O_1F_1$ es un rombo y un rectángulo, es decir un cuadrado. Luego, se sigue que, si r es el inradio de $\triangle ABD$, $O_1F_1 = O_1G_1 = AG_1 = AF_1 = r$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} sr &= [ABD] \\ \left(\frac{6+8+10}{2}\right)r &= \frac{6\cdot 8}{2} \\ 12r &= 24 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
O_1O_2 &= 2OO_1\\
&= 2\sqrt{E_1O_1^2 + E_1O^2}\\
&= 2\sqrt{r^2 + (DO - DE_1)^2}\\
&= 2\sqrt{r^2 + \left(\frac{BD}{2} - DF_1\right)^2}\\
&= 2\sqrt{r^2 + \left(\frac{BD}{2} - (DA - AF_1)\right)^2}\\
&= 2\sqrt{2^2 + \left(\frac{10}{2} - (6 - 2)\right)^2}\\
&= 2\sqrt{4 + (5 - 4)^2}\\
&= 2\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

□

4.7. Trigonometría

Si ya han visto la trigonometría, estoy seguro de que le tienen un profundo afecto. Recuerden que la trigonometría es hija de la geometría y el álgebra. Por lo tanto, aparte de sus identidades algebraicas, la trigonometría también nos ayuda mucho para los problemas de geometría. Veamos los dos teoremas que más lo hacen.

Teorema 4.7.1: Ley del seno extendida

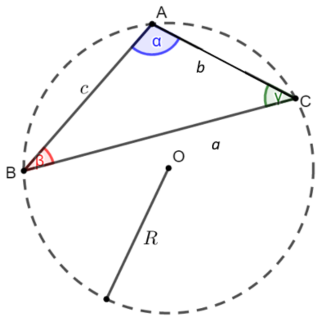
Sea ABC un triángulo, a, b, c sus lados y α, β, γ sus ángulos, respectivamente. Sea R su circunradio. Entonces,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$

Teorema 4.7.2: Ley del coseno

Sea ABC un triángulo, a, b, c sus lados y α, β, γ sus ángulos, respectivamente. Entonces,

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma
\end{aligned}
$$



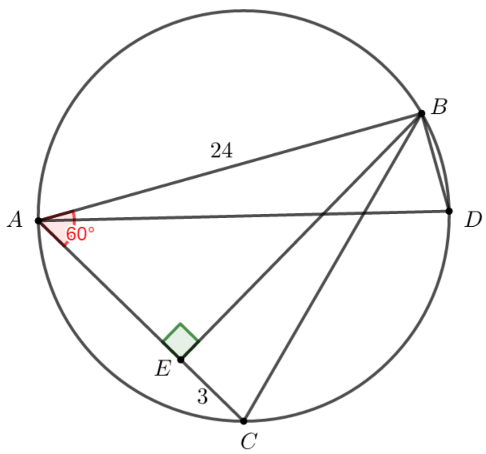
$$\frac{\operatorname{sen}\ \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\ \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\ \gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Ejemplo 4.7.1: Canguro 2018

Dos cuerdas AB y AC se dibujan en una circunferencia de diámetro AD. El ángulo $\angle BAC = 60°$, E es un punto sobre AC, BE es perpendicular a AC, $\overline{AB}$ =24 cm y $\overline{EC}$ =3 cm . ¿Cuál es la longitud de la cuerda BD?

Solución. Hay muchas maneras de resolver este problema, pero todas son retadoras



Notemos que

$$BE = AB \operatorname{sen} 60° = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

Ahora, por Pitágoras,

$$BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \sqrt{432 + 9} = 21$$

Por la Ley de los senos extendida,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\angle CAB}{BC} &= \frac{1}{2R}\\ \frac{\operatorname{sen}60^\circ}{21} &= \frac{1}{AD}\\ AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{42} &= 1\\ AD &= 14\sqrt{3}\end{aligned}$$

Finalmente, por Pitágoras,

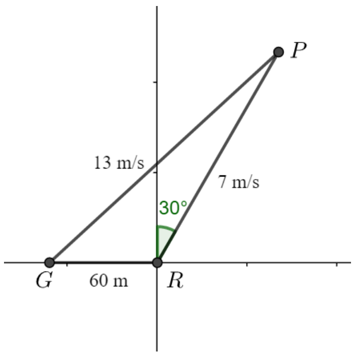
$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{(14\sqrt{3})^2 - 24^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

□

Ejemplo 4.7.2: OPM Fase II 2015

Un ratón está localizado en el punto R y a 60 metros al oeste, en el punto G, se encuentra un gato que quiere atraparlo. El ratón se da cuenta y huye a 7 m/s en dirección 30° Noreste. El gato, experto en geometría, corre a 13 m/s en línea recta para tratar de atraparlo. Determine el tiempo t que le toma al gato atrapar al ratón. (Puede que necesite la fórmula $d = v \times t$).

Solución. Digamos que el gato atrapa al ratón en el punto P.



Ahora, por la fórmula $d = v \times t$, notemos que en 7 m/s recorre $7t$ metros, y en 13 m/s recorre $13t$ metros. Entonces, nos queda un triángulo de lados de longitud $7t$, $13t$ y 60 y un ángulo de 120°. Luego, nos salta a la mente la Ley del coseno:

$$\begin{aligned}GP^2 &= GR^2 + RP^2 - 2\cdot GR\cdot RP\cos\angle PRG\\ (13t)^2 &= 60^2 + (7t)^2 - 2\cdot 60\cdot 7t\cos 120^\circ\\ 169t^2 &= 3600 + 49t^2 - 2\cdot 60\cdot 7t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}120t^2 - 420t - 3600 &= 0\\ 2t^2 - 7t - 60 &= 0\end{aligned}$$

Al resolver la cuadrática, obtenemos que $t = 15$ o $t = -8$. Sin embargo, el tiempo en que algo pasa es claramente positivo. Por lo tanto, el tiempo que le tomó fue 15 s.

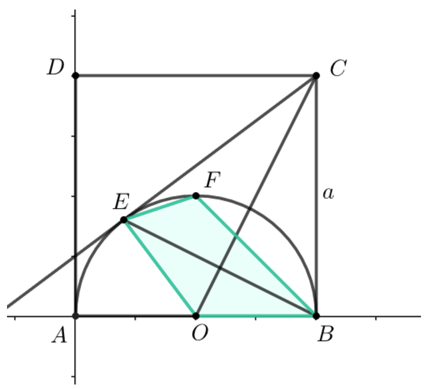
□

4.8. Geometría analítica

Finalmente, concluyamos con un regalo para aquellos que han visto geometría analítica. Quizá piensen que no es la geometría más bonita de todas, pero la verdad es que, si en un problema no se nos ocurre una solución con geometría elemental, a veces nos puede ayudar saber geometría analítica. Sin embargo, no es necesario que la sepan para la olimpiada. Es más bien como un bonus.

Ejemplo 4.8.1: OPM Fase II 2011

Considere el cuadrado $ABCD$ con lado de longitud a. Se construye la semicircunferencia de diámetro a, incluida en el cuadrado sobre el lado $\overline{AB}$. El segmento $\overline{CE}$ es tangente a la semicircunferencia en un punto E distinto de B, F es el centro del cuadrado y O el centro de la semicircunferencia. Determine el área del cuadrilátero $OBEF$.



Solución. En geometría analítica, si tenemos las coordenadas de los vértices de un polígono, podemos obtener su área. En efecto, tenemos tres coordenadas prácticamente regaladas:

- O: $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$
- B: $(a, 0)$
- F: $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Al igual que si no estuviéramos usando geometría analítica, lo que lo complica todo es E. Vamos a hallar sus coordenadas. Noten que, como CE y CB son tangentes y O es el centro, $CE = CB$ y $OE = OB$, por lo que CO es la mediatriz de EB. Luego, $CO \perp EB$. Ahora, notemos que la pendiente de la recta CO es 2. Luego, como $CO \perp EB$, la pendiente de EB será $-\frac{1}{2}$. Además, pasa por B, que es $(a, 0)$. Entonces, usando la forma punto-pendiente, ya podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}&=\frac{y-0}{x-a}\\-x+a&=2y\\x+2y-a&=0\end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la recta EB es $x+2y-a=0$. Sabemos que E es la intersección de EB con la circunferencia. Ahora, como el centro de esta dircunferencia es $\left(\frac{a}{2},0\right)$ y su radio es $\frac{a}{2}$, su ecuación será

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

Ahora, calculemos su intersección con EB resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x+2y-a&=0\\\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2&=\frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

Despejando x y sustituyendo,

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2&=\frac{a^2}{4}\\\left(a-2y-\frac{a}{2}\right)^2+y^2&=\frac{a^2}{4}\\\frac{a^2}{4}-2ay+4y^2+y^2&=\frac{a^2}{4}\\y(5y-2a)&=0\end{aligned}$$

Luego, los dos puntos de intersección de EB y la circunferencia tienen coordenadas y igual a 0 y $\frac{2}{5}a$. Sin embargo, el $y=0$ sabemos que es la coordenada de B, por lo que la de E será $\frac{2}{5}a$. Ahora solo despejamos en la ecuación de EB para hallar su coordenada x:

$$\begin{aligned}x+2y-a&=0\\x&=a-2\left(\frac{2}{5}a\right)\\x&=\frac{a}{5}\end{aligned}$$

Luego, las coordenadas de E son $\left(\frac{a}{5},\frac{2a}{5}\right)$. ¡Listo! Ahora solamente usamos la fórmula de área:

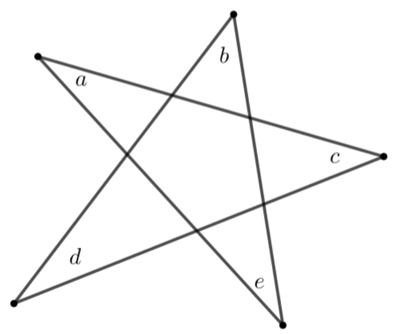
$$
\begin{aligned}
[OBFE] &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ a & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{5} & \frac{2a}{5} \end{vmatrix} \\
&= \frac{0 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{5} + 0 - (\frac{a^2}{10} - 0 - 0 - \frac{a^2}{5})}{2} \\
&= \frac{a^2}{5}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el área buscada es $\dfrac{a^2}{5}$. □

4.9. Problemas

Problema 4.9.1 (OPM Fase I 2011). Dos de los ángulos de un triángulo isósceles miden $70°$ y $x°$. Halle la suma de los tres posibles valores de $x°$ en grados.

Problema 4.9.2 (Manual). En la figura, los ángulos en cada uno de los vértices de la estrella miden a, b, c, d y e. ¿Cuánto vale la suma $a + b + c + d + e$?



Problema 4.9.3 (Canguro 2018). En el triángulo isósceles ABC, con $BA = BC$, los puntos K y L estń marcados en los lados AB y BC, respectivamente, de tal manera que $AK = KL = LB$ y $KB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle ABC$?

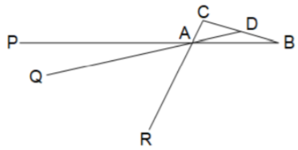
Problema 4.9.4 (OPM Fase II 2018). Sea ABC un triángulo rectángulo cuyos catetos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ miden 3 y 4 cm, respectivamente. Sean B' y C' puntos pertenecientes a los segmentos AB y AC respectivamente tales que la recta que contiene al segmento $\overline{BC}$ sea paralela a la recta que contiene al segmento $\overline{B'C'}$ y a distancia 1 cm de ella. Calcule el área de $\triangle AB'C'$.

Problema 4.9.5 (OPM Fase II 2008). Sea $ABCD$ un cuadrilátero con ángulos rectos en A y C. Los puntos E y F están en el segmento $\overline{AC}$ y los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{BF}$ son perpendiculares al segmento $\overline{AC}$. Si $AE = 3$. $DE = 5$, $CE = 7$, determine la longitud de BF.

Problema 4.9.6 (OPM Fase II 2007). Un cuadrado está inscrito en un triángulo equilátero. Calcule la razón del área del cuadrado al área del triángulo.

Problema 4.9.7 (Canguro 2017). $ABCD$ es un paralelogramo. El punto O es el ounto de intersección de las diagonales del paralelogramo. El punto M está en el lado DC. El punto de intersección de AM y BD es E. El punto de intersección de BM y AC es F. La suma de las áreas de los triángulos AED y BFC es $\frac{1}{3}$ del área S del paralelogramo. ¿Cuánto vale el área del cuadrilátero $EOFM$, en función de S?

Problema 4.9.8 (Canguro 2019). Dado el triángulo ABC de área S, sea D el punto medio de BC. Se toman los puntos P, Q, R en las rectas que pasan por AB, AD, AC, respectivamente, como se muestra en la figura, y tal que $AP = 2 \cdot AB$, $AQ = 3 \cdot AD$ y $AR = 4 \cdot AC$. ¿Cuál es el área del triángulo PQR?



Problema 4.9.9 (Canguro 2017). Se elige el punto D en el lado AC del triángulo ABC de tal manera que $DC = AB$. Los puntos medios de los segmentos AD y BC son, respectivamente, M y N. Si el ángulo NMC es igual a α, halle el valor del ángulo BAC.

Problema 4.9.10 (Manual). Una circunferencia r tiene una cuerda $\overline{AB}$ de longitud 10 y una cuerda $\overline{CD}$ de longitud 7, las cuales se extienden por B y C, respectivamente, hasta cortarse en P fuera de la circunferencia. Además, se tiene que $\angle APD = 60°$ y $BP = 8$. Halle el valor de r^2.

5. Combinatoria

Podemos definir la combinatoria como la parte de la matemática que *cuenta* cosas y que se preocupa por las estrategias y algoritmos. Como muchas veces se relaciona con cosas dinámicas como juegos, muchos la consideran el área más divertida de las matemáticas.

5.1. Conteo

Siempre que tenemos que contar algo tenemos la opción de hacerlo manualmente. Esta estrategia muchas veces funciona y es hasta más rápida y segura para casos pequeños. Sin embargo, a veces tenemos que trabajar con una gran cantidad de casos, por lo que existen estrategias para ello.

Teorema 5.1.1: Teorema de la Suma

Si tenemos que decidir entre hacer A_1 o A_2 o ... o A_n y hay a_1 maneras de hacer A_1, a_2 maneras de hacer A_2, ..., a_n maneras de hacer A_n, hay

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

maneras de decidir qué haremos.

Puede que se vea complicado, pero es algo obvio. Por ejemplo, si debes elegir entre ir a uno de tres restaurantes o a una de dos playas, la cantidad de maneras de decidir un lugar para ir será $3 + 2 = 5$. Eso es todo lo que dice el teorema.

Teorema 5.1.2: Teorema de la Multiplicación

Si tenemos que decidir entre hacer A_1 y A_2 y ... y A_n y hay a_1 maneras de hacer A_1, a_2 maneras de hacer A_2, ..., a_n maneras de hacer A_n, hay

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

maneras de decidir qué haremos.

Ahora, este teorema aplica para cuando vamos a hacer varias cosas. Si queremos ir a un restaurante y luego a la playa, y hay 3 restaurantes para escoger y 2 playas para escoger, podemos hacerlo de $3 \times 2 = 6$ maneras:

restaurante 1 y playa 1
restaurante 1 y playa 2
restaurante 2 y playa 1
restaurante 2 y playa 2
restaurante 3 y playa 1
restaurante 3 y playa 2

Eso es lo que quiere decir el teorema de la multiplicación.

El que aparece con mucha más frecuencia es el Teorema de la Multiplicación. El Teorema de la Suma casi siempre es un paso intermedio en el problema, el cual podríamos hacer hasta por intuición. En fin, estos dos teoremas casi siempre los usamos inconscientemente. Eso sí, tengan cuidado con algo:

Observación 5.1.1

Obsérvese que el Teorema de la Suma y el Teorema de la Multiplicación son similares, pero tienen una diferencia clave: en el Teorema de la Suma pasa un evento **o** el otro, mientras que en el Teorema de la Multiplicación pasa un evento **y** también los otros.

Observación 5.1.2

Nótese también que $A_1, A_2, \dots, A_n$ son acciones **disjuntas**, es decir, que no tienen nada que ver entre sí. Si existe algo en A_1 que también es de A_2, por ejemplo, estaríamos contándolo dos veces y ya los teoremas no funcionarían.

Esta última observación quiere decir que si, por ejemplo, al restaurante 1 solo pudiéramos encontrarlo en la playa 1, ya las opción

restaurante 1 y playa 2

no tendría sentido y habría que restarla.

Ejemplo 5.1.1

¿Cuál es la cantidad de códigos binarios de 5 cifras?

Solución. Para contar esto, supongamos que estamos eligiendo qué cifra poner en cada uno de los 5 espacios del código:

$$\square\ \square\ \square\ \square\ \square$$

Como es un código binario, en el primer espacio podemos elegir entre 0 y 1, es decir, dos opciones. Lo mismo en los otros 4 espacios. Por lo tanto, por el Teorema de la Multiplicación, como debemos escoger uno en cada espacio y ningún espacio depende de otro, hay $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ códigos binarios de 5 cifras. $\square$

Ejemplo 5.1.2: Manual

¿Cuántos números de 4 dígitos, todos distintos, podemos formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

Solución. Procedamos como en el ejemplo anterior:

$$\square\ \square\ \square\ \square$$

En el primer espacio tenemos 6 opciones. En el segundo, sin embargo, tendremos 5 opciones, porque ya no podremos elegir el número que hayamos elegido en el primer espacio (recuerda que los dígitos deben ser distintos). Usando el mismo razonamiento, en el tercer espacio hay 4 ocpiones y en el cuarto hay 3. Por lo tanto, podemos formar $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ números de este tipo. $\square$

Ejemplo 5.1.3

¿Cuántos números pares de 3 dígitos sin dos dígitos 4 consecutivos hay?

Solución. Este ejemplo es un poco más complejo. Como hay una condición rara con el 4, separémoslo en casos:

- La primera cifra es 4

  $$\boxed{4}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

  En este caso, para elegir en el segundo espacio tenemos 9 opciones (cualquir dígito del 0 al 9 que no sea 4), y para el tercer espacio tenemos 5 opciones (0, 2, 4, 6 u 8, pues el número es par). Luego, en este caso hay $1 \times 9 \times 5 = 45$ números.

- La primera cifra no es 4 pero la segunda sí

  $$\boxed{}\,\boxed{4}\,\boxed{}$$

  En este caso, para elegir en el primer espacio tenemos 8 opciones (cualquier dígito del 1 al 9 que no sea 4), el segundo espacio ya sabemos que es 4, y para el tercer espacio tenemos 4 opciones (cualquier par que no sea 4). Luego, en este caso hay $8 \times 1 \times 4 = 32$ números.

- Ni la primera ni la segunda cifra es 4.

  $$\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

  En este caso, para elegir en el primer espacio tenemos 8 opciones (cualquier dígito del 1 al 9 que no sea 4), en el segundo espacio tenemos 9 opciones (cualquier dígito del 0 al 9 que no sea 4), y para el tercer espacio tenemos 5 opciones, ya que el número es par. Luego, en este caso hay $8 \times 9 \times 5 = 360$ números.

Finalmente, como los casos que tratamos eran independientes entre sí y abarcan todas las posibilidades, por el Teorema de la Suma, la cantidad de números buscados es $45 + 32 + 360 = 437$. □

Ahora, veamos una cantidad muy asociada al Teorema de la Multiplicación:

Definición 5.1.1: Factorial

Para un entero no negativo n, definimos $n!$, y se lee como n *factorial*, como

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

En particular, definimos $0! = 1$.

Por el Teorema de la Multiplicación, tenemos lo siguiente:

Teorema 5.1.3: Permutaciones

La cantidad de maneras de reordenar o permutar n elementos distintos es $n!$.

Ejemplo 5.1.4: Manual

¿De cuántas maneras se pueden ordenar a 2 niños y 3 niñas en fila?

Solución. Como son en total 5 niños los que deben ordenarse en fila, la cantidad de maneras de hacerlo es $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. □

Ejemplo 5.1.5: Manual

¿De cuántas maneras se pueden ordenar a 2 niños y 3 niñas en fila si los niños deben ir juntos y las niñas también?

Solución. Podemos ver esto como si los niños fueran un solo bloque y las niñas también. Luego, la cantidad de maneras de arreglar 2 bloques es $2!$. Sin embargo, el bloque de los niños se puede, a su vez, ordenar de $2!$ maneras, así como el bloque de las niñas se puede ordenar de $3!$ maneras. Por lo tanto, por el Teorema de la multiplicación, la cantidad de maneras en que esto se puede hacer es $2! \cdot 2! \cdot 3! = 24$. □

Ejemplo 5.1.6: Manual

¿De cuántas maneras se pueden ordenar a 2 niños y 3 niñas en fila si los niños deben ir juntos?

Solución. Procedemos como en el ejemplo anterior. Si consideramos a los niños como un bloque y a cada niña por separado, el problema se reduce a ordenar 4 elementos (el bloque de los niños y las 3 niñas) y a ordenar internamente el bloque de los niños. Por lo tanto, hay $4! \cdot 2! = 48$ maneras de hacerlo. □

Hasta ahora hemos visto cómo calcular la cantidad de manera de *ordenar* cosas. Sin embargo, a veces lo que nos interesa es cómo escogerlas, sin importar en qué orden las escojamos.

Definición 5.1.2: Coeficiente binomial

Definimos $\binom{n}{k}$ como la cantidad de maneras de escoger k elementos de entre n.

Teorema 5.1.4: Combinaciones

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Ejemplo 5.1.7: Manual

Se tiene un club formado por 4 hombres y 3 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 personas?

Solución. En total hay 7 personas, por lo que podemos escoger el comité de

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2} = 7 \times 5 = 12$$

maneras. □

Ejemplo 5.1.8: Manual

Se tiene un club formado por 4 hombres y 3 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 personas con a lo más dos hombres?

Solución. Como son a lo más dos hombres, pueden ser 0, 1 o 2 hombres.

- Cuando no hay ningún hombre

  En este caso, el comité deberá consistir de las 3 mujeres, por lo que hay 1 manera de escogerlo en este caso.

- Cuando hay un hombre

  En este caso, hay $\binom{4}{1} = 4$ maneras de escoger a ese hombre y $\binom{3}{2} = 6$ maneras de escoger a las dos mujeres, por lo que hay $4 \cdot 6 = 24$ maneras de escogerlo en este caso.

- Cuando hay dos hombres

  En este caso, hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de escoger a esos hombres y $\binom{3}{1} = 3$ maneras de escoger a la mujer, por lo que hay $6 \cdot 3 = 18$ maneras de escogerlo en este caso.

Por lo tanto, la cantidad de maneras en que esto puede hacerse es $1 + 24 + 18 = 43$. □

Observación 5.1.3

Nótese que las permutaciones y combinaciones son muy parecidas, pero en las permutaciones **sí importa** el orden en que escogemos los elementos y en las combinaciones **no importa**.

Por último, veamos otra fórmula útil.

Teorema 5.1.5: Permutaciones con repetición

Si queremos permutar n elementos pero hay a_1 de un mismo tipo (o sea, que son idénticos entre sí), a_2 de otro tipo, ... y a_k de otro tipo, la cantidad de maneras de hacerlo es

$$\frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \cdots \cdot a_k!}$$

En palabras simples, lo que esto quiere decir es que dividas entre el factorial de la cantidad de cosas repetidas. Es como si quitaras la cantidad de veces que las contaste de más.

Ejemplo 5.1.9

¿De cuántas maneras distintas se pueden reordenar las letras de la palabra MATEMATICA (deliberadamente sin tilde)?

Solución. La palabra tiene 10 letras, pero 3 de ellas son A, 2 de ellas son T y 2 de ellas son M. Por lo tanto, la cantidad de maneras en que pueden ordenarse es

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 720 \times 210 = 151200$$

□

5.2. Probabilidad

Otro tema recurrente es la probabilidad. Creo que todos sabemos qué significa, pero definámosla formalmente:

Definición 5.2.1: Probabilidad

Definimos la *probabilidad* de que algo pase como

$$\frac{\text{cantidad de casos en los que pasa}}{\text{cantidad de casos totales}}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que salga cara o sello al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. La probabilidad también se puede expresar en porcentaje, recordando que $x\,\% = \frac{x}{100}$. Sin embargo, es mucho más útil expresarla como fracción y dejar los porcentajes como meras formalidades.

Interesantemente, la probabilidad también tiene sus teoremas de suma y multiplicación a su manera.

Teorema 5.2.1: Teorema de la Suma para probabilidad

Si la probabilidad de que A_1 pase es p_1, la probabilidad de que A_2 pase es p_2, ... y la probabilidad de que A_n pase es p_n, la probabilidad de que A_1, A_2, ... o A_n ocurra es

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

Teorema 5.2.2: Teorema de la Multiplicación para probabilidad

Si la probabilidad de que A_1 pase es p_1, la probabilidad de que A_2 pase es p_2, ... y la probabilidad de que A_n pase es p_n, la probabilidad de que A_1, A_2, ... y A_n ocurran es

$$p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$$

Sin más, veamos ejemplos.

Ejemplo 5.2.1: Jean Lucca Mastrolinardo

¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado 7 veces te salga un impar, después un par, después un impar, ... y después un impar?

Solución. En primer lugar, veamos cuál es la probabilidad de que esto ocurra en un solo lanzamiento. Como hay 3 impares en el dado (1, 3, 5) y 6 números en total, la probabilidad es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Pasa lo mismo con los pares, es decir, como hay tres pares (2, 4, 6) y son 6 números, la probabilidad de que salga par es $\frac{1}{2}$ también. Luego, da igual si queremos que salga impar o par, la probabilidad será $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, como lo lanza 7 veces, la probabilidad será

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}}_{7\text{veces}}=\frac{1}{128}$$

□

Ejemplo 5.2.2: OPM Fase II 2014

Pablo y Juan tienen cada uno un juego de diez cartas numeradas del 1 al 10. Ellos lanzan las cartas alternadamente. En cada lanzamiento, el que obtenga la carta con mayor número gana; de ser iguales, gana Juan. Calcule la probabilidad que tiene Juan de ganar el juego.

Solución. Calculemos primero los casos en que Juan gana:

Si Juan tira el 10, gana si Pablo tira 1, 2, 3, ... o 10
Si Juan tira el 9, gana si Pablo tira 1, 2, 3, ... o 9
Si Juan tira el 8, gana si Pablo tira 1, 2, 3, ... u 8
.
.
.
Si Juan tira el 1, gana si Pablo tira el 1

Luego, Juan gana en $10+9+8+\cdots+1$ casos, que, por la fórmula de Gauss (si no la conoces, consulta 3.1.5), son 55 casos. Luego, como hay $10\times 10=100$ casos totales, la probabilidad de que Juan gane es $\dfrac{55}{100}=\dfrac{11}{20}$. □

Ejemplo 5.2.3: OPM Fase II 2019

Ana tiene en una bolsa 21 balotas. Hay una de color rojo, dos amarillas, tres azules, cuatro verdes, cinco naranjas y seis moradas. La probabilidad de que al sacar tres balotas de la bolsa al azar y sin reposición todas sean del mismo color se puede escribir como $\frac{1}{k}$. Encuentre k.

Solución. Primero, es claro que hay $\binom{21}{3}$ maneras de sacar 3 balotas al azar. Ahora, es claro que jamás tendremos tres balotas rojas o amarillas. Enfoquémonos en los casos favorables: hay $\binom{3}{3}$ casos en los que nos pueden salir 3 balotas azules, $\binom{4}{3}$ casos en los que nos pueden salir 3 balotas verdes, $\binom{5}{3}$ casos en los que nos pueden salir 3 balotas naranjas y $\binom{6}{3}$ casos en los que nos pueden salir 3 balotas moradas. Luego, hay

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}$$

casos favorables. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra lo que queremos es

$$\begin{aligned}\frac{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}}{\binom{21}{3}}&=\frac{1+4+10+20}{7\cdot 10\cdot 19}\\&=\frac{1}{38}\end{aligned}$$

Finalmente, $k=38$. □

Ejemplo 5.2.4: OPM Fase II 2018

Álex tiene dos monedas, una en cada uno de sus bolsillos. Una es una moneda normal con cara y sello y la otra es una moneda para trucos con dos caras. Álex selecciona una moneda al azar y cuando la lanza resulta cara.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda que seleccionó Álex sea la normal?

b) Suponga que lanza la misma moneda y obtiene cara otra vez. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda que seleccionó Álex sea la normal?

c) Suponga que lanza la misma moneda y esta vez obtiene sello. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda que seleccionó Álex sea la normal?

d) Suponga que lanza la moneda n veces, con n entero positivo, y cada vez la moneda muestra cara. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda que seleccionó Álex sea la normal?

Solución. Este es un problema un poco enredado, pero tratemos de analizarlo bien. Primeramente, si pasa lo que dice la c), claramente tiene que ser la moneda normal, pues la de trucos ni siquiera tiene sello. Luego, la probabilidad en este caso sería 1 o 100 %. Noten que la a) y la b) son solo los casos $n = 1$ y $n = 2$ de la parte d), por lo que nos enfocaremos en esta parte solamente. Primero, busquemos los casos favorables, es decir, los casos en que, seleccionando la normal, le pueden salir n caras seguidas. Noten solo hay una posibilidad: que haya seleccionado la moneda normal y le haya salido siempre cara. Luego, solo hay un caso posible. Ahora, los casos totales en que le pudieron haber salido a Álex n caras seguidas. Estos casos son $1 + 2^n$: el único caso en que él selecciona la moneda normal y le salen n caras seguidas más los 2^n casos en que es la moneda de trucos. ¿Por qué 2^n? Pues porque, si seleccionó la moneda de trucos, había 2 posibilidades en que le salía cara en el primer lanzamiento, dos posibilidades en el segundo, ... y 2 posibilidades en el n-ésimo, es decir, $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2}_{n \text{veces}} = 2^n$. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra lo que se pide es $\dfrac{1}{1+2^n}$. (En particular, las respuestas de la a) y b) son $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$, respectivamente). □

En el problema anterior era significativamente confuso determinar cuáles eran los casos favorables y los totales (lo sé porque yo estuve en ese examen). Hubo gente que cometió el error de decir que, como en el caso $n = 1$ era $\dfrac{1}{3}$, por el teorema la multiplicación, la respuesta para el caso n era $\dfrac{1}{3^n}$. ¿Cuál es el error? Pues que los n lanzamientos no son independientes entre sí: como Álex nunca cambia la moneda, todos están ligados a la elección inicial de Álex. Por lo tanto, el teorema de la multiplicación no funcionaba. Para poder aplicarlo, **los eventos deben ser independientes entre sí**.

5.3. Problemas

Problema 5.3.1 (OPM Fase I 2013). Se escogen al azar y a la vez dos números del conjunto del conjunto $\{-2, -3, 5, 6\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que su producto sea positivo?

Problema 5.3.2 (OPM Fase I 2014). Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara y cinco?

Problema 5.3.3 (OPM Fase I 2012). ¿Cuál es la cantidad de enteros positivos de tres dígitos cuyas cifras sean todas distintas?

Problema 5.3.4 ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra RECOGER?

Problema 5.3.5 (OPM Fase I 2013). En el equipo de fútbol de 11 integrantes se debe elegir un capitán titular y un capitán suplente. ¿De cuántas maneras se pueden elegir?

Problema 5.3.6 (Manual). Mi abuelita quiere hacer una fiesta para celebrar su cumpleaños y tiene 11 amigos de los cuales 6 son mujeres.

a) ¿De cuántas maneras puede invitar a tres o más personas a la fiesta?

b) ¿De cuántas maneras puede invitar a tres o más personas a la fiesta si debe haber el mismo número de hombres que de mujeres (incluyéndola a ella)?

Problema 5.3.7 (OPM Fase II 2016). En la ciudad de Avalon todos los números de teléfono tienen seis dígitos y empiezan con 81. Marta ha olvidado el número de Ana, pero encontró parte del papel donde lo anotó. ¿Cuántas posibilidades hay para el número de teléfono de Ana?

Problema 5.3.8 (OPM Fase II 2016). Sea S el conjunto de todos los números de nueve dígitos formados tomando los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 solo una vez. Por ejemplo, 132547968 está en S. Ana, Blanca, Carla y Diana juegan al juego de la probabilidad. Luis escoge al azar un número del conjunto S.

- Ana gana si escoge un número par.
- Blanca gana si escoge un número mayor que 300000000.
- Carla gana si escoge un número tal que el primero, el quinto y noveno dígito (de izquierda a derecha) son impares.
- Diana gana si escoge un número tal que la suma de los dos primeros dígitos (de izquierda a derecha) es igual al último dígito.

Determine la probabilidad que tiene cada una de ganar.

Problema 5.3.9 (OPM Fase II 2018). Laura tiene 6 bolsas. Cada bolsa contiene seis fichas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Laura saca, al azar, una ficha de cada bolsa. Luego suma los dos números mayores que muestran las fichas. Por ejemplo, si sacó las fichas con los números 4, 2 y 3, sumaría 4 y 3 para obtener 7. Si saca las fichas con los números 3, 2 y 2, ella sumaría el 3 y el 2 para obtener 5. Calcule la probabilidad de obtener 7 en la suma si procede de esta manera.

Problema 5.3.10 (OPM Fase II 2013). Rosy juega con una tabla de 7 cuadrados $\times 7$ cuadrados. Calcule la probabilidad que tiene Rosy de escoger al azar, uno tras otro y sin reposición, dos cuadrados adyacentes.

Nota: Dos cuadrados son adyacentes si comparten un lado en común.

6. Teoría de Números

A todos nos gusta más trabajar con números enteros que con decimales, raíces o fracciones (supongo). Resulta que, por eso, los números enteros tienen un lugar especial en el corazón de todos. La teoría de números es el área de la matemática que estudia exclusivamente los números enteros y sus propiedades.

6.1. Nociones básicas

Definición 6.1.1: Divisibilidad

Decimos que un entero a divide a un entero b, y se escribe $a|b$, si y solo si existe un entero c tal que $b = ac$.

Definición 6.1.2: Factores y divisores

Si $a|b$, a es un *factor* o un *divisor* de b, y b es un *múltiplo* de a o es *divisible* entre a.

Definición 6.1.3: Paridad

Llamamos a un número *par* si es divisible entre 2 e *impar* si no lo es.

Definición 6.1.4: Dígitos

Llamamos *dígitos* o *cifras* a los número del 0 al 9 con los que escribimos todos los demás números. Por ejemplo, los dígitos de 235 son 2, 3 y 5.

De seguro conocen estos conceptos de primaria. Es más, me atrevería a decir que conocen lo siguiente:

Teorema 6.1.1: Criterios de divisibilidad

En los enteros, siempre se cumple lo siguiente:

- Un número es divisible entre 2 si y solo si su último dígito es un número par.
- Un número es divisible entre 3 si y solo si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.
- Un número es divisible entre 4 si y solo si sus últimos dos dígitos forman un múltiplo de 4.
- Un número es divisible entre 5 si y solo si su último dígito es 0 o 5.
- Un número es divisible entre 6 si y solo si es divisible entre 2 y entre 3.
- Un número es divisible entre 8 si y solo si sus últimos dígitos forman un múltiplo de 8.
- Un número es divisible entre 9 si y solo si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.
- Un número es divisible entre 10 si y solo si su último dígito es 0.
- Un número es divisible entre 11 si y solo si la diferencia entre la suma de todos sus dígitos en posición par y la suma de todos sus dígitos en la posición impar es un múltiplo de 11.
- Un número es divisible entre 12 si y solo si es divisible entre 3 y entre 4.

Observación 6.1.1

1 y -1 dividen a todos los números y 0 es divisible entre todos los números. Son los únicos enteros con esta propiedad.

También existe un criterio de divisibilidad para el 7, pero, en mi opinión, es un poco complicado. Es bueno que lo sepan, pero a veces resulta hasta más rápido dividir el número entre 7 y ver si la división da exacta o no. Hablando de eso...

Definición 6.1.5: La división

Cuando realizamos la operación $a \div b$, obtenemos un resultado q llamado *cociente* y un número r que sobra, llamado *residuo*. La relación entre estos números es que

$$a = bq + r$$

En particular, r debe ser **estrictamente menor** que b. Si $r = 0$, se dice que la división es *exacta*, y tendríamos que $b|a$.

Y bueno, otro dato del baúl de los recuerdos de primaria:

Teorema 6.1.2: Notación decimal

Todo número $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ (es decir, que sus dígitos son a_0, a_1, ..., a_n) puede escribirse como $10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots + 1 \cdot a_0$

Si lo ven complicado, no tienen de qué preocuparse. ¿Recuerdan lo de las centenas, decenas y unidades, y que si tenían por ejemplo 1987 lo podían escribir como $1000+900+80+7$? Bueno, este teorema dice básicamente eso. Por cierto, para evitar confuciones, procuraremos escribir $\overline{ab}$ para referirnos al número entero de dígitos a y b. Si lo escribimos como ab y no especificamos podría confundirse con $a \times b$. Ahora que ya recordamos todos estos detalles, ¡estamos listos para empezar a ver problemas!

Ejemplo 6.1.1

Comprueba que 27720 es divisible por todos los números del 1 al 12

Solución. Probemos esto mediante observaciones:

- Claramente es divisible por 1
- Como acaba en 0, es divisible por 2, 5 y 10
- Como sus últimos 2 dígitos forman 20, que es múltiplo de 4, es divisible entre 4.
- Como sus últimos 3 dígitos forman 720, que es múltiplo de 8, es divisible entre 8.
- Como la suma de sus dígitos es $2+7+7+2+0=18$, que es múltiplo de 3 y 9, el número es divisible entre 3 y 9.
- Como es divisible entre 2, 3 y 4, también es divisible entre 6 y 12.
- La suma de sus dígitos en posición impar es $2+7+0=9$, y la suma de sus dígitos en posición par es $7+2=9$. Por lo tanto, como la diferencia entre estas sumas, $9-9=0$, es múltiplo de 11, el número es divisible entre 11.
- Manualmente podemos comprobar que $27720 \div 7 = 360$, y la divisón es exacta. Por lo tanto, el número es divisible por 7.

□

Ejemplo 6.1.2: OPM Fase II 2007

Un número de cinco cifras $\overline{abcde}$ está formado por los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5. Si el número de tres dígitos $\overline{abc}$ es divisible por 4, $\overline{bcd}$ es divisible por 5 y $\overline{cde}$ es divisible por 3, encuentre el número.

Solución. Empecemos por el criterio de divisibilidad más simple, que es el de 5. Como $\overline{bcd}$ es divisible por 5, d tiene que ser 5 (porque el 0 no está en las opciones). Ahora, enfoquémonos en $\overline{abc}$. Como es divisible entre 4, c debe ser par. Luego, hay dos casos:

- <u>$c = 2$</u>

  En este caso, como $\overline{cde}$ es múltiplo de 3, $c=2$ y $d=5$, por el criterio de divisibilidad, debemos tener que $2+5+e=7+e$ debe ser múltiplo de 3. Ahora, los únicos valores de e en $\{1,2,3,4,5\}$ para los cuales esa expresión es múltiplo de 3 son $e=2$ y $e=5$, pero resulta que esos dos ya los usamos. Luego, este caso no tiene solución.

- <u>$c = 4$</u>

  En este caso, como $\overline{abc}$ es múltiplo de 4, por el criterio, $\overline{bc}$ debe ser múltiplo de 4, por lo que b solo puede ser 2, en que $\overline{bc} = 24$. Además, como $\overline{cde}$ es múltiplo de 3, $c = 4$ y $d = 5$, por el criterio de divisibilidad, debemos tener que $4 + 5 + e = 9 + e$ debe ser múltiplo de 3. Noten que el único valor de e que hace que esa expresión sea múltiplo de 3 es $e = 3$. Finalmente, como ya usamos el 2, el 3, el 4 y el 5, a debe ser 1, y, en efecto, el número 12453 cumple con las condiciones del problema.

Por lo tanto, el número buscado es 12453. □

Ejemplo 6.1.3: OPM Fase II 2011

Un número de dos dígitos se divide entre la suma de sus cifras y se obtiene 2 como cociente y 2 como residuo. Si ese mismo número de dos dígitos se multiplica por la suma de sus cifras, el producto es 112. Halle este número.

Solución. Sea $\overline{ab}$ el número de dos cifras que buscamos. Como no conocemos a y b, es más expresar $\overline{ab}$ como $10a + b$. Ahora, lo que el problema nos dice es que al dividir eso entre $a + b$ obtenemos cociente y residuo 2. Por la definición de división, eso quiere decir que

$$10a + b = (a + b)(2) + 2$$

Desarrollando un poco más esa expresión,

$$\begin{aligned} 10a + b &= (a + b)(2) + 2 \\ 10a + b &= 2a + 2b + 2 \\ 8a &= b + 2 \end{aligned}$$

Aquí debemos detenernos a observar. $b + 2$ es un entero positivo, pero b es un dígito, por lo que solo puede ir de 0 a 9. Teniendo esto en cuenta, $b + 2$ está entre 2 y 11. Sin embargo, se supone que $b + 2 = 8a$, por lo que es un múltiplo de 8. Luego, como el único múltiplo de 8 entre 2 y 11 es 8, solo puede ocurrir que $a = 1$ y $b = 6$. Por lo tanto, como $\overline{ab} = 16$ cumple con las condiciones del problema, el número buscado es 16.

□

Noten que, curiosamente, no utilizamos para nada la segunda condición del problema (que el número por la suma de sus cifras da 112). De hecho, la hubiéramos tenido que usar si no nos hubiéramos detenido a analizar la ecuación $8a = b + 2$.

Hasta ahora hemos visto la divisibilidad como algo muy numérico e intuitivo, pero ahora veamos algunas propiedades más generales:

Teorema 6.1.3: Propiedades de divisibilidad

En lo siguiente, a, b, c, x, y son cualesquiera enteros:

- Si $a|b$, entonces $a|bc$
- Si $ac|bc$,entonces $a|b$
- Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$
- Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|bx + cy$
- $1|a$, $a|a$ y $a|0$

Ejemplo 6.1.4: Canguro 2017

Cuatro números, x, y, z y t son 3, 8, 12 y 14, pero no necesariamente en ese orden. El valor de x es menor que el de z. La suma $x + t$ es divisible por 5, así como también la suma $z + t$. ¿Cuánto vale y?

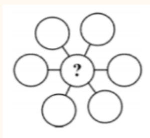
Solución. Como $5|x + t$ y $5|z + t$, debe ocurrir que

$$5|(z + t) - (x + t) = z - x$$

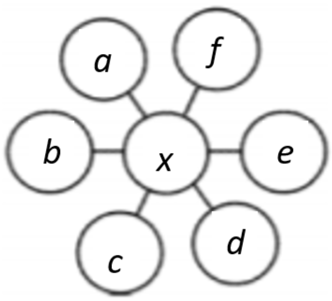
Luego, como los únicos enteros cuya diferencia es múltiplo de 5 en $\{3, 8, 12, 14\}$ son 8 y 3, $z = 8$ y $x = 3$. Como $5|x+t = 3+t$, t debe ser 12. Finalmente, como es el único valor que queda, $y = 14$. □

Ejemplo 6.1.5: Canguro 2018

Se escriben los números 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 en los siete círculos de forma que las sumas a lo largo de las tres líneas sean iguales. ¿Cuánto vale la suma de los números que pueden ocupar el círculo marcado con el signo de interrogación?



Solución. Digamos que tenemos la siguiente configuración que funciona:



Luego, se supone que

$$a + x + d = b + x + e = c + x + f$$

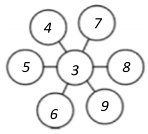
Por lo tanto, si sumamos las tres ecuaciones, como valen lo mismo, debemos obtener un múltiplo de 3, es decir,

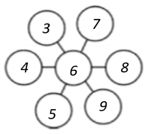
$$3|a + b + c + d + e + f + 3x$$

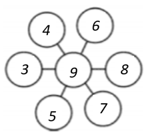
pero, como $3|3x$, tendríamos que

$$\begin{aligned} 3|&(a + b + c + d + e + f) \\ &= (a + b + c + d + e + f + x) - x \\ &= 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - x \\ &= 42 - x \end{aligned}$$

pero, como $3|42$, tendríamos que $3|x$. Luego, x solo puede ser 3, 6 o 9, y, en efecto, los tres funcionan:







Por lo tanto, la suma buscada es $3 + 6 + 9 = 18$. □

Resulta que la divisibilidad por 2, en sí, muchas veces es muy poderosa.

Teorema 6.1.4: Propiedades de la paridad

Si a, b son pares y c, d son impares,

- $a + b$ es par
- $c + d$ es par
- $a + c$ es impar
- ab es par
- cd es impar
- ac es par

Ejemplo 6.1.6: Manual

¿Cuál es el dígito de las unidades del número $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2019$?

Solución. Como 5 está en ese producto, el resultado tiene que acabar en 0 o en 5. Sin embargo, como es un producto de impares, debe ser impar. Por ende el último dígito debe ser 5.

□

Ejemplo 6.1.7: Manual

Halla el residuo de la división por 2 del número

$$3^{2011} + 6^{2011} + 9^{2011} + \cdots + 5979^{2011}$$

Solución. Básicamente nos preguntan si el número ese es par o impar. Olvidémonos de los 2011's porque no afectan la paridad del número. Ahora, noten que en la lista

$$3, 6, 9, \ldots, 5979$$

hay 996 pares y 997 impares (solo son los primeros 1993 múltiplos positivos de 3), por lo que el resultado final será impar. Finalmente, el residuo de dicha expresión al dividirla entre 2 es 1. □

Ahora, conozcamos a los famosos, fundamentales y hasta el día de hoy misteriosos bloques de la Teoría de Números:

Definición 6.1.6: Primos

A un número p cuyos únicos divisores positivos son 1 y él mismo (o sea p) lo llamamos *primo*. Si el número tiene más divisores, lo llamamos *compuesto*.

Observación 6.1.2

Por definición, 1 no es ni primo ni compuesto.

Teorema 6.1.5: Propiedad de los primos

Si p es primo y $p|ab$, entonces $p|a$ o $p|b$

Ejemplo 6.1.8: Canguro 2018

¿Para cuántos valores de de n el número $|n^2 - 2n - 3|$ es primo?

Solución. (Si hay dudas con respecto a qué significa $|x|$, consultar 3.3.5).Como esa expresión es $|(n-3)(n+1)|$, si es prima, alguno de esos dos factores forzosamente debe ser ± 1.

- <u>$(n-3)$ es 1</u>

  n sería 4, por lo que $|(n-3)(n+1)| = 5$, que sí es primo.

- $(n-3)$ es -1

  n sería 2, por lo que $|(n-3)(n+1)| = 3$, que sí es primo.
- $(n+1)$ es 1

  n sería 0, por lo que $|(n-3)(n+1)| = 3$, que sí es primo.
- $(n+1)$ es -1

  n sería -2, por lo que $|(n-3)(n+1)| = 5$, que sí es primo.

Por lo tanto, esa expresión es prima para 4 valores de n. $\square$

Es fácil recordar los primos pequeños. La verdad, yo me sé los primos del 1 al 100, y no es la gran cosa: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97. Sin embargo, ¿cómo sabemos si un número cualquiera es primo? Podemos tratar dividiéndolo entre todos los primos menores que él y ver si alguno lo divide. Si alguno lo divide, pues no es primo. De lo contrario, sí lo es; no obstante, si el número es grande, esto tardará años... Afortunadamente, hay un teorema que nos lo hace un poco más corto:

Teorema 6.1.6: Criterio para identificar primos

Un entero p es primo si y solo si no es divisible por ningún primo menor o igual a $\sqrt{p}$.

Ejemplo 6.1.9

¿Es 401 un primo? ¿Y 403?

Solución. Notemos que $\sqrt{401} = 20.02...$ y $\sqrt{403} = 20.07....$ Luego, por el teorema anterior, los únicos primos que tenemos que revisar son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Del 2 al 11 es inmediato que no dividen a ninguno de los dos. Solo tendríamos que hacer las divisiones manuales entre 13, 17 y 19. A 401 no lo divide ninguno de estos, por lo que sí es primo. A 403, sin embargo, lo divide 13: $403 = 13 \cdot 31$. Por lo tanto, no es primo. $\square$

Ahora, veamos un resultado fundamental con respecto a los primos y al resto de los números enteros.

Teorema 6.1.7: Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número entero positivo puede escribirse de manera única como producto de primos, es decir,

$$n = p_{\alpha_1}^{\beta_1} p_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots p_{\alpha_k}^{\beta_k}$$

donde $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots, p_{\alpha_k}$ son k primos distintos y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ son sus exponentes.

El pocotón de letras es para que el teorema esté escrito de la forma matemáticamente correcta, pero no se preocupen. Lo único que quiere decir es que podemos empezar a cualquier número como producto de primos elevados a algún exponente. Pero esto ya lo sabían, ¿no? Cuando descomponen 12, por ejemplo,

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

y lo escriben como $12 = 2^2 \cdot 3$... ¡están usando el Teorema Fundamental de la Aritmética!

Con confianza, repasemos otros conceptos conocidos.

Definición 6.1.7: MCD

Definimos el *máximo común divisor* de dos números a, b como el mayor número que divide tanto a a como a b, y lo escribimos $\mathrm{MCD}(a, b)$ o simplemente (a, b).

El MCD a y b puede interpretarse como el producto de los primos que a y b tienen en común, elevados al mayor exponente tal que siga dividiendo a a y b. Por ejemplo, el MCD de $8 = 2^3$ y $12 = 2^2 \cdot 3$ es 2^2. No tiene al 3 porque el 3 no divide a 8 y no es 2^3 porque el 2 en $2^2 \cdot 3$ solo está elevado hasta el 2.

Definición 6.1.8: mcm

Definimos el *mínimo común múltiplo* de dos números a, b como el menor número que es múltiplo tanto de a como de b, y lo escribimos $\mathrm{mcm}(a, b)$ o simplemente $[a, b]$.

Y bueno, creo que también saben cómo hallarlos:

Ejemplo 6.1.10

Halle $(18, 24)$ y $[18, 24]$

Solución. Como esto de seguro lo conocen, será una demostración de pocas palabras.

$$\begin{array}{cc|c} 18 & 24 & 2 \\ 9 & 12 & 3 \\ 3 & 4 & \end{array}$$

Por lo tanto, su máximo común divisor $(18, 24)$ es $2 \cdot 3 = 6$.

$$\begin{array}{cc|c} 18 & 24 & 2 \\ 9 & 12 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Por lo tanto, su mínimo común múltiplo $[18, 24]$ es $2^3 \cdot 3^2 = 72$. □

Un dato interesante con respecto al mcm es el siguiente:

Teorema 6.1.8: Propiedad del mcm

Si $a_1|n$, $a_2|n$, ... y $a_k|n$, entonces $\mathrm{mcm}(a_1, a_2, \ldots a_k)|n$.

Ejemplo 6.1.11: OPM Fase I 2012

El número k es divisible por 2, 3 y 15. De los siguientes, ¿cuál es divisible por 2, 3 y 15 también?

a) $k+5$

b) $k+15$

c) $k+20$

d) $k+30$

e) $k+45$

Solución. Por lo anterior, sabemos que decir que 2, 3 y 15 dividan a un número es lo mismo que decir que su mínimo común múltiplo, o sea, 30, lo divida. Ahora, si $30|k+c$ y $30|k$, debemos tener que $30|c$. Por lo tanto, la opción correcta es d), pues $30|30$. □

Algo que quizá no habían notado del MCD y el mcm:

Teorema 6.1.9: MCD y mcm

Un resultado curioso, bonito y algo útil:

$$(a,b)\cdot[a,b]=ab$$

Ejemplo 6.1.12: OPM Fase I 2013

El máximo común divisor de a y b es 4 y el mínimo común múltiplo de a y b es 120. Si b es 40, hallar el valor de a.

Solución. Por el teorema anterior,

$$\begin{aligned} ab &= (a,b)\cdot[a,b] \\ a\cdot 40 &= 4\cdot 120 \\ a &= 12 \end{aligned}$$

□

A veces, dos números no tendrán ningún primo en común, es decir, su MCD será 1.

Definición 6.1.9: Primos relativos

Decimos que dos números a,b son *primos relativos* si $(a,b)=1$.

En particular, si m es el MCD de a y b, podemos escribir $a=ma'$ y $b=mb'$, y resultará que a' y b' serán primos relativos. ¿Por qué? Porque se supone que m es el **máximo divisor** que tienen en común a y b. Si a' y b' tuvieran primos en común, dichos primos tendrían que estar contenidos en m, pues m contiene a todos los primos comunes entre a y b. Por ejemplo, si tenemos a 12 y a 16, y los dividimos entre su MCD, que es 4, obtendríamos 3 y 4, y estos son relativos entre sí. Algo más:

Teorema 6.1.10: Propiedad de los primos relativos

Si a es primo relativo a c y $a|bc$, entonces

$$a|b$$

Veamos ejemplos interesantes:

Ejemplo 6.1.13: Manual

¿Cuántos de los siguientes 60 números son múltiplos de 60?

$$84, 2 \cdot 84, 3 \cdot 84, \ldots, 60 \cdot 84$$

Solución. Notemos que si $60|c \cdot 84$ entonces $5|c \cdot 7$ y, como 5 y 7 son primos relativos, $5|c$. De aquí, como entre 1 y 60 hay 12 múltiplos de 5, la cantidad buscada es 12. $\square$

Ejemplo 6.1.14: OPM Fase II 2019

¿Cuál es el menor número de tres dígitos N que admite un múltiplo de seis dígitos de la forma $ABABAB$?

Solución. Este es un problema difícil porque requiere de una observación "mágica" para resolverlo. ¿Y cuál es? Noten que si yo multiplico, por ejemplo, 10101×23, obtenemos

$$\begin{array}{rrr} 23 & \times & 10101 \\ \hline & & 23 \\ & 23 & \\ 23 & & \\ \hline 23 & 23 & 23 \end{array}$$

Entonces, podemos usar esa misma lógica para notar que $ABABAB = AB \cdot 10101$ (recuerden que aquí AB es un número de dos dígitos A y B). Listo, ahora podemos descomponer $ABABAB$ aun más descomponiendo a 10101:

$$\begin{aligned} ABABAB &= AB \cdot 10101 \\ &= AB \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \end{aligned}$$

Noten que el problema prácticamente nos está pidiendo que hallemos el menor N de 3 cifras que divida a un número de la forma $ABABAB$, es decir, de la forma $AB \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. El menor candidato es 100, pero 100 es primo relativo a 3, 7, 13 y 37, por lo que, si $100|AB \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, entonces debe dividir a AB, pero esto es imposible porque AB solo tiene dos cifras y 100 tres, es decir, $100 > AB$. El siguiente candidato es 101, pero verificamos que también es primo relativo a 3, 7, 13 y 37. Por el mismo motivo, lo descartamos. El siguiente candidato es 102. ¡Resulta que este sí sirve! Noten que $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, por lo que, si $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17|AB \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, entonces el 3 se simplifica y nos queda $34|AB \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Esto claramente se puede dar: solo elijan $AB = 34$. En conclusión, hemos llegado a que $102|343434$. Por lo tanto, el menor N de tres cifras con un múltiplo de la forma $ABABAB$ es 102. □

Ejemplo 6.1.15: Instagram

¿Existen enteros positivos distintos a, b tales que $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ es entero?

Solución 2. Quizá recuerden este problema de la sección del discriminante. Bueno, como a y b son enteros, es natural que sospecharan que tenía una solución mediante teoría de números... ¡y la tiene! Digamos que $\dfrac{a^2+b^2}{ab} = n$. Sea $m = MCD(a,b)$. Escribamos $a = ma'$ y $b = mb'$. (Considerar el MCD es muy útil cuando queremos que las cosas se simplifiquen, como en este caso, que estamos trabajando con una fracción).

$$\begin{aligned} n &= \frac{a^2+b^2}{ab} \\ &= \frac{m^2a'^2+m^2b'^2}{ma'\cdot mb'} \\ &= \frac{a'^2+b'^2}{a'b'} \end{aligned}$$

Entonces, ¿no hicimos nada? Claro que sí. Aunque el problema luzca igual recuerden que a' y b' ahora son primos relativos, porque son los remanentes de quitarle a a y b sus divisores en común (el MCD). Ya veremos cómo nos sirve esto. Si a un entero yo lo multiplico por un entero y le resto un entero, el resultado seguirá siendo entero. Luego, si n es entero,

$$\frac{a'^2+b'^2}{a'b'}\cdot a' - b'$$

será un entero. Sin embargo, eso querría decir que

$$\begin{aligned} \frac{a'^2+b'^2}{a'b'}\cdot a' - b' &= \frac{a'^2+b'^2-b'^2}{b'} \\ &= \frac{a'^2}{b'} \end{aligned}$$

es un entero. Sin embargo, como a' y b' son primos relativos, la única manera de que $b'|a'^2$ es que $b'=1$. Análogamente, como el problema es simétrico en a' y en b', obtenemos que $a'=1$. Por lo tanto, $a=m=b$. En conclusión, no, no existen enteros positivos distintos tales que dicha expresión sea entera.

□

Finalmente, veamos unas fórmulas que pueden llegar a sernos útiles cuando trabajamos con divisores.

Teorema 6.1.11: Cantidad de divisores

Si $n = p_{\alpha_1}^{\beta_1} p_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots p_{\alpha_k}^{\beta_k}$, entonces tiene exactamente

$$(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)\dots(\beta_k + 1)$$

divisores positivos.

A veces podemos contar los divisores manualmente, y a veces incluso tenemos que hacerlo para saber cuáles son específicamente, pero en ambos casos la fórmula anterior es superútil: siempre es bueno saber el número exacto de divisores con certeza.

Teorema 6.1.12: Producto de los divisores

Si un entero n tiene d divisores, el producto de todos sus divisores es $n^{\frac{d}{2}}$.

Teorema 6.1.13: Mayor potencia de un primo en $n!$

Si p es un primo y p^α es la mayor potencia de p que divide a $n!$, entonces

$$\alpha = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

(Si hay dudas con respecto a qué significa $\lfloor x \rfloor$, consultar 3.3.5).

Ejemplo 6.1.16

¿Cuántos divisores tiene el número 360?

Solución. Descomponiendo, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, por lo que tendrá

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

divisores.

□

Ejemplo 6.1.17: OPM Fase I 2014

A Pepito le encanta dividir entre 2. Un día comienza a dividir el número 16!. Primero lo divide entre dos, luego vuelve a dividirlo entre dos y así continúa dividiendo entre 2. ¿Cuántas veces Pepito puede realizar este proceso?

Solución. En pocas palabras, tenemos que hallar la mayor potencia 2^α de 2 que divide a 16!. Pueden descomponer el 16! manualmente y hallarlo, pero resolver este problema es pan comido con la fórmula:

$$\begin{aligned}\alpha &= \left\lfloor \frac{16}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{32} \right\rfloor + \dots \\ &= 8 + 4 + 2 + 1 + 0 + \text{(puros ceros, porque las expresiones que siguen serán menores que 1)} \\ &= 15\end{aligned}$$

Por lo tanto, Pepito puede realizar este proceso 15 veces. □

Ejemplo 6.1.18: OPM Fase II 2015

El producto de todos los enteros positivos que son divisores de 6^{16} es igual a 6^k, para algún k. Determine el valor de k.

Solución. Por la fórmula de cantidad de divisores, la cantidad de divisores de $6^{16} = 2^{16} \cdot 3^{16}$ es

$$(16+1)(16+1) = 17 \cdot 17 = 289$$

Por lo tanto, por la fórmula del producto de los divisores, el producto de los divisores de 6^{16} es

$$(6^{16})^{\frac{289}{2}} = 6^{\frac{289}{2} \cdot 16} = 6^{2312}$$

Finalmente, $k = 2312$. □

6.2. Congruencias

Hasta ahora hemos visto que la divisibilidad es una propiedad fundamental en Teoría de Números. ¿Será que es incluso más poderosa de lo que creemos? ¿Será que es tan poderosa como la ecuación en el Álgebra? ¡Pues maravíllense al ver el equivalente de la igualdad en la divisibilidad!

Definición 6.2.1: Congruencias

Decimos que a y b son *congruentes módulo m* y lo escribimos

$$a \equiv b \pmod{m}$$

si y solo si $m|a-b$.

En particular, $a \equiv 0 \pmod{m}$ es lo mismo que decir $m|a$. Quizá lo vean algo raro, pero tranquilos, ya les explico. Decimos, en palabras simples, que $a \equiv b \pmod{m}$ cuando dejan el mismo residuo al dividirse entre m. Vamos a dar un ejemplo. Pensemos $\pmod{4}$, por ejemplo. Dividamos a los enteros positivos por el residuo que dejan al dividirse entre 4:

$$\begin{gathered} 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ ... \\ 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ ... \\ 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ ... \\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ ... \end{gathered}$$

Viéndolo así... como que hay un patrón, ¿no? Cada grupo de residuos es una progresión aritmética de diferencia 4 (para detalles de progresiones aritméticas, ver la Definición 3.1.4). Interesante... Si son una progresión aritmética, ¿por qué limitarnos solo a los positivos? Vamos a invitar a los negativos y al 0 también:

$$\begin{gathered} ...,\ -7,\ -3,\ 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ ... \\ ...,\ -6,\ -2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ ... \\ ....,\ -5,\ -1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ ... \\ ...,\ -4,\ 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ ... \end{gathered}$$

Y me preguntarán de seguro: si -3 está en el grupo de los que tienen residuo 1, significa que al dividir -3 entre 4, ¿obtenemos residuo 1? Y sí, suena raro, pero si recordamos la Definición 6.1.5 de división, como

$$-3 = 4 \cdot (-1) + 1,$$

¡de hecho sí tiene sentido que su residuo sea 1! Así que creo que ya empiezan a ver lo poderoso que es esto. Bien. Entonces, recuerden que si decimos $a \equiv b \pmod 4$ estamos diciendo que a y b pertenecen al mismo de uno de los 4 grupos de enteros de arriba y, si dijeramos que $a \not\equiv b \pmod 4$, querríamos decir que a y b pertenecen a distintos grupos. Ahora que ya entendemos relativamente bien qué es una congruencia, veamos sus propiedades, que, por cierto, son muy similares a las de la ecuación.

Teorema 6.2.1: Propiedades de las congruencias

Para cuaquier entero positivo m y entero x se cumple que

- $a \equiv a \pmod m$
- Si $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv a \pmod m$
- Si $a \equiv b \pmod m$ y $b \equiv c \pmod m$, $a \equiv c \pmod m$
- Si $a \equiv b \pmod m$, $a + x \equiv b + x \pmod m$
- Si $a \equiv b \pmod m$, $ax \equiv bx \pmod m$
- Si $a \equiv b \pmod m$, $a^x \equiv b^x \pmod m$
- Si $a \equiv b \pmod m$ y $c \equiv d \pmod m$, $a + c \equiv b + d \pmod m$
- Si $a \equiv b \pmod m$ y $c \equiv d \pmod m$, $ac \equiv bd \pmod m$

Un dato importante de lo anterior es que, al igual que si en la ecuación hay dos cosas iguales puedes sustituir una por otra, en las congruencias también. Por ejemplo, si

$$x^7 \equiv yz \pmod 5$$

y $x \equiv 1 \pmod 5$, podemos decir sin miedo que

$$\begin{aligned} x^7 &\equiv yz \pmod 5 \\ (1)^7 &\equiv yz \pmod 5 \\ 1 &\equiv yz \pmod 5 \end{aligned}$$

Bueno ya somos expertos en congruencias, ¿cierto? Bueno, si no es así, no se preocupen. Cuando yo estaba aprendiendo qué era una congruencia tuve que leer la definición más de cuatro veces para entenderlo a fondo. Vamos a los ejemplos. Creo que viendo cómo se aplica e incluso aplicarlo uno mismo aclara mucho mejor las dudas.

Ejemplo 6.2.1: Manual

Encuentra el residuo de dividir $12233 \cdot 4556679 + 87653^3$ por 4.

Solución. Reemplazando esos números gigantes por sus residuos $\pmod 4$,

$$\begin{aligned} 12233 \cdot 4556679 + 87653^3 &\equiv 1 \cdot 3 + (1)^3 \pmod 4 \\ &\equiv 4 \pmod 4 \\ &\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el residuo de esa expresión al dividirla entre 4 es 0. □

Ejemplo 6.2.2: Luis Modes

Hoy es jueves 9 de julio. La OPM es el 21 de agosto. ¿Qué día de la semana caerá?

Solución. Como le quedan $31 - 9 = 22$ días a julio, faltan $21 + 22 = 43$ días para el 21 de agosto. Ahora, como los días de la semana se repiten en ciclos de 7, digamos que domingo es el día 0, lunes el 1, ... y sábado el 6. Como

$$43 \equiv 1 \pmod 7$$

y el jueves es el día 4, el día que caerá la prueba será el

$$4 + 1 \equiv 5 \pmod 7,$$

es decir, un viernes. □

Ejemplo 6.2.3: OPM Fase II 2011

Considere el conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ y sea B un subconjunto de A tal que la suma de cualesquiera dos de sus elementos no es divisible por 3. ¿Cuál es el mayor número de elementos que puede tener B?

Solución. "... no es divisible por 3". Esa frase nos induce a ver este problema $\pmod 3$. Dividamos a los números del 1 al 100 según su residuo $\pmod 3$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1, 4, 7, \ldots, 100\} \\ C_2 &= \{2, 5, 8, \ldots, 98\} \\ C_0 &= \{3, 6, 9, \ldots, 99\} \end{aligned}$$

- Noten que en B no pueden haber 2 elementos de C_0, pues la suma de dos múltiplos de 3 es un múltiplo de 3. Luego, en B puede haber a lo más un múltiplo de 3.
- Tampoco pueden convivir un elemento de C_1 y uno de C_2, pues $1+2 \equiv 0 \pmod 3$, es decir, su suma sería múltiplo de 3. Por lo tanto, debemos elegir cuál de los dos hace que B tenga más elementos: si C_1 o C_2. Como C_1 tiene 34 elementos y C_2 solo tiene 33, claramente es C_1.

Finalmente, esto demuestra que B tiene a lo más 34+1=35 elementos. Noten que el conjunto $B = \{3, 1, 4, 7, \ldots, 100\}$ tiene 35 elementos y cumple las condiciones del problema. □

Antes del ejemplo siguiente, déjenme compartirles un truco que tal vez les sea útil. Fijémonos en los cuadrados perfectos: tienen residuos particulares.

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ \ldots$$

Notamos lo siguiente:

Teorema 6.2.2: Cuadrados $\pmod 3$ y $\pmod 4$

Los cuadrados perfectos siempre son congruentes a 0 o 1 $\pmod 4$.

Interesante, ¿no? Pueden encontrarse más congruencias ustedes mismos observando y probando. Veamos cuán útil puede llegar a ser esto:

Ejemplo 6.2.4: OPM Fase II 2010

Sea $a_1 = 14$, $a_2 = 144$ y, en general, sea $a_n = 1\underbrace{44\ldots4}_{n\text{veces}}$. Encuentre todos los enteros positivos n tales que a_n es un cuadrado perfecto.

Solución. Notemos que $n = 2$ y $n = 3$ funcionan, pues $144 = 12^2$ y $1444 = 38^2$. $n = 1$ claramente no sirve, pues 14 no es cuadrado perfecto. Ahora, probemos que ningún otro n sirve. Si $n \geq 4$ y asumimos que $a_n = c^2$ para algún c par,

$$\begin{aligned} c^2 &= 1\underbrace{44\ldots4}_{n\text{veces}} \\ c^2 &= 4 \cdot 36\,\underbrace{11\ldots1}_{n-2\text{veces}} \\ \left(\frac{c}{2}\right)^2 &= 36\,\underbrace{11\ldots1}_{n-2\text{veces}} \end{aligned}$$

Luego, $36\,\underbrace{11\ldots1}_{n-2\text{veces}}$ sería un cuadrado perfecto también. Sin embargo, sus últimos 2 dígitos son 11, por lo que es congruente a 3 $\pmod 4$, pero esto contradice el hecho de que los cuadrados son congruentes a 0 o 1 $\pmod 4$. Entonces es imposible. Por lo tanto, las únicas respuestas son $n = 2$ y $n = 3$. $\square$

Ejemplo 6.2.5: OPM Fase II 2016

Considere los enteros positivos n con la propiedad que 2 divide a n, 3 divide a $n+1$, 4 divide a $n+2$ y así sucesivamente, hasta que 10 divide a $n+8$. El primer entero positivo que cumple con estas condiciones es 2. Encuentre el séptimo de estos números.

Solución. Decir que un entero n cumple esas propiedades es lo mismo que decir

$$\begin{aligned}
n &\equiv 0 \pmod{2}\\
n+1 &\equiv 0 \pmod{3}\\
n+2 &\equiv 0 \pmod{4}\\
n+3 &\equiv 0 \pmod{5}\\
n+4 &\equiv 0 \pmod{6}\\
n+5 &\equiv 0 \pmod{7}\\
n+6 &\equiv 0 \pmod{8}\\
n+7 &\equiv 0 \pmod{9}\\
n+8 &\equiv 0 \pmod{10}
\end{aligned}$$

Ordenándolo un poco,

$$\begin{aligned}
n &\equiv 2 \pmod{2}\\
n &\equiv 2 \pmod{3}\\
n &\equiv 2 \pmod{4}\\
n &\equiv 2 \pmod{5}\\
n &\equiv 2 \pmod{6}\\
n &\equiv 2 \pmod{7}\\
n &\equiv 2 \pmod{8}\\
n &\equiv 2 \pmod{9}\\
n &\equiv 2 \pmod{10}
\end{aligned}$$

Ahora sí se ve interesante. Noten que, por la definición de congruencia, esto quiere decir que

$$\begin{gathered}
2|(n-2)\\
3|(n-2)\\
4|(n-2)\\
5|(n-2)\\
6|(n-2)\\
7|(n-2)\\
8|(n-2)\\
9|(n-2)\\
10|(n-2)
\end{gathered}$$

Luego, esto quiere decir que el mínimo común múltiplo de todos estos números debe dividir a $(n-2)$, es decir, $2520|n-2$. Por lo tanto, los números n deben ser de la forma $2520k+2$, para k un entero no negativo. Como el primero es 2, cuando $k=0$, el séptimo será cuando $k=6$, es decir, $2520 \cdot 6 + 2 = 15122$. □

6.3. Problemas

Problema 6.3.1 (OPM Fase I 2012). Sea $2012k2012$ un número de 9 dígitos. Halle la suma de los posibles valores de k que hacen que el número sea divisible por 3.

Problema 6.3.2 (OPM Fase I 2013). Halle la cantidad de divisores positivos de 2013.

Problema 6.3.3 (Manual). Hallar los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.

Problema 6.3.4 (Manual). Halle todos los valores enteros de n para los cuales

$$\frac{18}{n-2}$$

es un número entero.

Problema 6.3.5 (OPM Fase II 2016). La suma de cuatro números primos diferentes es un número primo y la suma de tres de ellos también es un primo. Encuentre cuatro números, cuya suma sea lo menor posible, que cumplan con estas condiciones.

Problema 6.3.6 (OPM Fase II 2019 (fragmento)). Encuentre todos los enteros positivos a, b, c que no sean cuadrados perfectos y menores que 40 tales que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$$

Problema 6.3.7 ¿Cuántos ceros hay a la derecha de 100! ?

Problema 6.3.8 (Manual). Demuestra que $13|2^{70} + 3^{70}$

Problema 6.3.9 (OPM Fase II 2009). Un número natural n es *amigable* si en su representación decimal aparecen los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 exactamente una vez, y para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, el número que se forma con las primeras k cifras de n es divisible por k. Determine la cantidad de números amigables.

Problema 6.3.10 (OPM Fase II 2007). Un número natural es *superprimo* si es primo y si todo número que resulta de eliminarle una cifra cualquiera siempre resulta primo. Determine todos los números superprimos de tres cifras.

7. Problemas

Problema 7.0.1 (OPM Fase II 2016). Un caballo, una vaca, un chivo y un venado salen a almorzar. El caballo comió un área equivalente al área de 6 cuadrados de lado 6 m de longitud cada uno; la vaca comió un área equivalente al área de 3 círculos de 5 m de radio cada uno; el chivo comió un área equivalente al área de un triángulo equilátero de 22 m de longitud cada lado, y el venado comió un área equivalente al área de un trapecio isósceles de perímetro de longitud 90 m y bases de longitud 30 m y 40 m. Ordene a los animales de menor a mayor de acuerdo al área que comió.

Problema 7.0.2 (Luis Modes). En una bolsa hay 2020 canicas: 1010 son rojas y 1010 son azules. Maté escoge 2 canicas aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

Problema 7.0.3 (OPM Fase II 2009). Sea $n = \overline{abc}$ un número de 3 dígitos. Supongamos que podemos construir un triángulo isósceles (incluyendo triángulos equiláteros) con a, b, c como las longitudes de sus lados. Determinar la cantidad de tales enteros n.

Problema 7.0.4 (OPM Fase II 2008). Ana eligió tres dígitos distintos entre sí y distintos de 0, y formó con ellos los seis números de tres cifras distintas posibles. El promedio de estos seis números es un número natural terminado en 5. Hallar los 3 dígitos que escogió Ana. Dar todas las posibilidades.

Problema 7.0.5 (OPM Fase I 2018). Sea N el menor número natural con 378 divisores que tiene la forma

$$2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$$

con a, b, c, d distintos de cero. Encuentre el valor de cada uno de los exponentes.

Problema 7.0.6 (OPM Fase II 2011). Aquiles pensó en un número capicúa de cinco dígitos y le dijo a Pablo lo siguiente:

- La suma de los dígitos del número pensado es 25.
- Si intercambio la cifra de las unidades con la de las decenas y la de las unidades de millar con la de las decenas de millar, la diferencia entre el nuevo número y el que tenía es 53946.

De todos los números capicúa de cinco dígitos, calcula la probabilidad que tiene Pablo de adivinar el número que pensó Aquiles.
Nota: Un número es capicúa si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo, 343 y 2442 son capicúas.

Problema 7.0.7 (OPM Fase II 2018). En un tablero inicialmente se encuentran escritos los números 11 y 13. Cada minuto un número adicional aparece en el tablero un número que es igual a la suma de dos de los números ya escritos en el tablero. ¿El 2018 puede aparecer en el tablero?

Problema 7.0.8 (Luis Modes). Sean A, B y C puntos sobre una circunferencia Γ tales que $\overline{BC}$ es diámetro de Γ. La recta tangente a Γ que pasa por A corta a la recta BC en el punto D. Sea E un punto sobre la recta AB tal que $DE \perp AE$. Si $\overline{AD} = 1 + \sqrt{5}$ y $\overline{DB} = 2$, pruebe que el triángulo AEC es isósceles.

Problema 7.0.9 (Luis Modes). Sean a, b y c números reales tales que se cumple el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a - 4b = 8$$
$$ab + c^2 = 0$$

Halle el mínimo valor que puede tomar c.

Problema 7.0.10 (OPM Fase II 2007). En un cuadrado de longitud 1, fije uno de los vértices, y denótelo A. Compruebe que existe un único triángulo equilátero APQ inscrito en el cuadrado y determine su área.

Problema 7.0.11 (OPM Fase II 2009). Determine la cantidad de parejas ordenadas de números naturales (a, b) con $a > 0$ y $b > 0$ que satisfacen:

$$19 < a + b < 98$$

Nota: En una pareja ordenada es importante el orden. por ejemplo, la pareja $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Problema 7.0.12 (OPM Fase II 2009). El cuadrilátero $ABCD$ es tal que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos. Sean M y N los puntos medios de los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Sea I el punto de corte de las rectas $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{DN}$. Asumamos que $\dfrac{IM}{AI} = \dfrac{1}{4}$. Establezca que $ABCD$ es un paralelogramo.
Nota: Orientar la figura en sentido antihorario.

Problema 7.0.13 (Luis Modes). Félix está aburrido y decide apoderarse de los números. Si en cualquier momento Félix tiene un número n, él obtiene también los números $19n$ y $s(n)$, donde $s(n)$ es la suma de los dígitos de n. (Por ejemplo, si en algún momento Félix tuviera el número 1, él obtendría también el número 19, pues $19 = 19 \times 1$, y luego obtendría los números 361 y 10, pues $361 = 19 \times 19$ y $10 = 1 + 9 = s(19)$, etc.).

Inicialmente Félix solo tiene el número 4.

a) ¿Es posible que Félix obtenga el número 22?

b) ¿Y el 23?

Problema 7.0.14 (OPM Fase II 2009). ¿En cuántas formas se pueden ordenar los números 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 tal que la suma de cada cuatro números consecutivos sea divisible por 3?

Problema 7.0.15 (OPM Fase II 2014). El *año encantado* de Pepito ocurre precisamente cuando su edad es igual a la suma de los dígitos del año de su nacimiento. Por ejemplo, el año encantado del Bisabuelo de Pepito, que nació en 1899, fue el año 1926. Notemos que el bisabuelo de Pepito no es el único con año encantado 1926, ya que cualquier persona nacida en 1908 tendrá también a 1926 como año encantado. Encuentre cuál es el próximo año después de 1926 tal que dos personas nacidas en años diferentes lo tienen de año encantado.